

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

MC SYLLABUS 3.2

H.A. LAUWERIER

RANDWAARDE PROBLEMEN

DEEL 2

MATHEMATISCH CENTRUM

AMSTERDAM 1967

AMS (MOS) classificatie (1970): 35-01, 35K05, 35L05

Tweede bijdruk: 1973

Inhoud

	blz.
Inleiding	1
1. Verkenning	3
2. Warmtegeleiding in een staaf	6
3. Methode van Bernoulli	8
4. Fourier reeksen	11
5. Trigonometrische ontwikkelingen bij de warmtegeleiding in een staaf	21
6. Fourier integralen	30
7. Warmtegeleiding in een oneindig lange staaf	33
8. Warmtegeleiding in een half-oneindige staaf	37
9. Principe van Duhamel	42
10. Warmtegeleiding in een eindige staaf	45
11. De trillende snaar	50
12. Problemen in vlak en ruimte	59
13. Warmtegeleiding in de ruimte	63
14. Warmtegeleiding in een blok	67
15. Het trillende vlies	72
16. Bessel functies	76
17. Problemen in cylindercoördinaten	81
18. Het probleem van Stefan	86
Index	89

Inleiding

De in deze syllabus behandelde stof stemt overeen met een aan de Universiteit van Amsterdam gegeven college partiële differentiaalvergelijkingen van de mathematische fysica in de omvang van een jaaruur. Dit college sluit aan bij de stof die in syllabus 3.1 behandeld wordt, maar kan overigens los daarvan als zelfstandig geheel bestudeerd worden. Bij dit college ligt het accent op een differentiaalvergelijking van het parabolische type zoals deze voorkomt bij problemen van warmtegeleiding. Naast hierop betrekking hebbende randwaardeproblemen worden soortgelijke problemen bij de differentiaalvergelijking van de trillende snaar en die van het trillende vlies behandeld. Wat betreft de in syllabus 3.1 behandelde onderwerpen is er slechts enige overlapping bij de behandeling van de stellingen van Gauss en Green en van de Bessel functies. Deze syllabus heeft hetzelfde karakter als de hiervoor genoemde. Ook hier is de theoretische behandeling beknopt en worden de essentiële punten zoveel mogelijk aan de hand van uitgewerkte voorbeelden toegelicht.

Als voorbereidende kennis eisen we slechts bekendheid met de theorie van gewone differentiaalvergelijkingen van het lineaire type. Voor uitvoeriger studie kan onderstaande literatuur aanbevolen worden, welke ook reeds in syllabus 3.1 vermeld werd.

Als inleiding in de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen kunnen dienen

SAGAN, H. Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics. Wiley, 1961.

CHURCHILL, R.V. Fourier series and boundary value problems. Sec. ed. McGraw-Hill, 1963.

Toepassingen van de hulpmiddelen van de functietheorie vindt men in

CHURCHILL, R.V. Complex variables and applications. Sec. ed. McGraw-Hill, 1960 (Internat. student edition).

Enige handboeken over de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen zijn

- GARABEDIAN, P.R. Partial differential equations. Interscience, 1964.
- SOBOLEV, S.L. Partial differential equations of mathematical physics. Pergamon, 1964.
- TYCHONOFF, A.N. en A.A. SAMARSKI. Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Berlin, 1959.
- KOSHYLYAKOV, N.S., M.M. SMIRNOV en E.B. GLINER. Differential equations of mathematical physics. Amsterdam, 1964.
- COURANT, R. en D. HILBERT. Methods of mathematical physics. Interscience.

Naast deze literatuur kunnen we voor de kennis van de Bessel functies nog het volgende praktische boekje aanbevelen.

- BOWMAN, F. Introduction to Bessel functions. Dover book S 462.

Hiernaast noemen we nog

- SNEDDON, I. Special functions of mathematical physics and chemistry. Univ. Math. Texts, Oliver & Boyd (1956).

In dit boekje worden behalve Bessel functies ook andere voor randwaardeproblemen belangrijke speciale functies behandeld.

1. Verkenning

Bij de behandeling van een partiële differentiaalvergelijking (pdv) zoekt men naar een functie van twee of meer variabelen welke voldoet aan een betrekking tussen partiële afgeleiden. In toepassingen gaat het veelal om een functie $u(x,y,z,t)$ welke afhangt van een plaats $P(x,y,z)$ in de ruimte, waarbij x , y en z Cartesische coördinaten zijn, en van de tijd t . Soms heeft de plaatsbepaling slechts betrekking op een vlak (x,y) of een lijn (x) . Eenvoudige voorbeelden van een dergelijke functie zijn o.a. druk, temperatuur, electrostatische potentiaal, (kleine) verstoring uit een evenwichtstoestand.

Een pdv voor een functie u van twee veranderlijken x,y is van de vorm

$$(1.1) \quad F(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0.$$

De hoogste afgeleide bepaalt per definitie de orde van de pdv. De veel voorkomende lineaire pdv van de tweede orde is van de vorm

$$(1.2) \quad a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g$$

waarbij de coëfficiënten van x en y kunnen afhangen.

De volgende typen komen in toepassingen veel voor.

De potentiaalvergelijking

$$(1.3) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

of in drie variabelen

$$(1.4) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

De diffusievergelijking of warmtevergelijking

$$(1.5) \quad u_{xx} = u_t,$$

of

$$(1.6) \quad u_{xx} + u_{yy} = u_t,$$

of

$$(1.7) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t.$$

De golfvergelijking

$$(1.8) \quad u_{xx} = u_{tt},$$

of

$$(1.9) \quad u_{xx} + u_{yy} = u_{tt},$$

of

$$(1.10) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}.$$

Een pdv bezit in het algemeen een uitgebreide klasse van oplossingen. Een specifieke oplossing wordt eerst vastgelegd door zekere aanvullende voorwaarden, randvoorwaarde(n) met betrekking tot de plaats en beginvoorwaarde(n) met betrekking tot de tijd.

In abstracte zin is er geen onderscheid tussen tijd- en plaatsvariabelen en is een beginvoorwaarde ook een randvoorwaarde.

Voorbeeld 1.1

Aan de tweedimensionale potentiaalvergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$ voldoet zowel het reële als het imaginaire deel van een willekeurige analytische functie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. In zekere zin zijn er dus even veel oplossingen als analytische functies. Eenvoudige functies als

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

$$e^z = e^x \cos y + ie^y \sin y,$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

leveren al een aantal oplossingen van (1.3).

We houden ons in dit college bezig met lineaire pdv van het type (1.2) of het analogon hiervan in meer variabelen. Voor een dergelijke lineaire pdv geldt het superpositiebeginsel volgens het schema:

particuliere oplossing van inhomogeen lineaire pdv + lineaire combinatie van oplossingen van homogeen lineaire pdv $\Rightarrow$ algemene oplossing van inhomogeen lineaire pdv.

Voorbeeld 1.2

Aan de inhomogene potentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 1,$$

voldoet de particuliere oplossing $u_0(x,y) = \frac{1}{2} x^2$.

Een algemene oplossing is dus

$$u(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + \operatorname{Re} f(z), \quad f \text{ analytisch.}$$

Kiezen we bijvoorbeeld $f(z) = -\frac{1}{4} z^2$ dan komt er de oplossing $\frac{1}{4} (x^2 + y^2)$.

Voorbeeld 1.3

We zoeken een oplossing van de inhomogene potentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 1,$$

welke voldoet aan de randvoorwaarden

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi.$$

Door proberen vinden we de particuliere oplossing $u_0(x,y) = -\frac{1}{2} x(\pi - x)$. Aan de homogene pdv voldoet de oplossing $\sin kx e^{ky}$ voor gehele waarden van k . Door lineaire superpositie ontstaat de oplossing

$$u = -\frac{1}{2} x(\pi - x) + \sum a_k \sin kx e^{ky},$$

waarbij de coëfficiënten a_k willekeurige constanten zijn.

2. Warmtegeleiding in een staaf

De warmtegeleiding in een homogeen veronderstelde staaf wordt bepaald door de temperatuur $u(x,t)$ welke afhangt van één plaatsvariabele x en de tijd t . Temperatuurverschillen geven aanleiding tot transport van warmte en wel is de hoeveelheid warmte q dt welke in een tijdelement dt door een eenheid van doorsnede op de plaats x stroomt gelijk aan

$$- K \frac{\partial u}{\partial x} dt.$$

Om tot de vergelijking van het warmtetransport te komen maken we de warmtebalans op voor een staaf met een eenheidsdoorsnede en begrensd door vlakken x en $x + dx$.

In dt seconden stroomt door genoemde vlakken de hoeveelheid

$$\begin{aligned} K \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} dt - K \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt = \\ = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt. \end{aligned}$$

Deze hoeveelheid is gelijk aan de door het staafelement opgenomen warmtehoeveelheid

$$\rho c \{u(x, t + dt) - u(x, t)\} dx = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} dx dt,$$

waarbij ρ en c de constant veronderstelde dichtheid en soortelijke warmte zijn. Gelijktelling leidt tot de p.d.v.

$$(2.1) \quad k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

waarbij

$$k = \frac{K}{\rho c}.$$

De temperatuurschaal is hierbij tamelijk willekeurig.

Aangezien een lineaire substitutie

$$(2.2) \quad u = \alpha u' + \beta$$

tot precies dezelfde vergelijking (2.1) leidt kan desgewenst een willekeurige begintemperatuur als nultemperatuur gekozen worden. Zolang geen numerieke toepassingen gewenst zijn kan de constante k door aanpassing van de tijdschaal gelijk aan 1 gekozen worden. Aldus beperken we ons tot de vereenvoudigde vergelijking (1.5) of

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Is de staaf begrensd bij $x = a$ dan zijn er de volgende mogelijkheden:

a) Voorgeschreven temperatuur bij de rand

$$(2.4) \quad u = u_1 \quad \text{voor} \quad x = a.$$

Hierbij kan u_1 een constante zijn of een functie van de tijd.

b) Voorgeschreven warmtetransport bij de rand

$$(2.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = q_1 \quad \text{voor} \quad x = a,$$

waarbij q_1 constant is of een functie van de tijd.

c) Randvoorwaarde van Newton

Deze voorwaarde beschrijft straling aan de rand in een omgeving met een buitentemperatuur u_0 volgens

$$(2.6) \quad K \frac{\partial u}{\partial x} = h(u - u_0),$$

waarbij in het eenvoudigste geval h en u_0 constanten zijn.

In het volgende wordt besproken hoe men in een aantal gevallen langs constructieve weg tot de oplossing van een randwaardeprobleem m.b.t. de warmtevergelijking kan komen.

3. Methode van Bernoulli

We beschouwen de warmtegeleiding in een staaf $0 < x < a$ waarbij naast de homogene randvoorwaarde

$$(3.1) \quad u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a,$$

ook de beginvoorwaarde

$$(3.2) \quad u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0,$$

gegeven is.

Volgens de door Daniel Bernoulli aangegeven methode bouwen we de oplossing op volgens het superpositiebeginsel uit bouwstenen van het type

$$(3.3) \quad u = \phi(x)\psi(t),$$

die dus speciale oplossingen van (1.5) zijn waarbij tevens $\phi(x)$ aan de gestelde randvoorwaarden voldoet. Het is hierbij van essentieel belang dat zowel de p.d.v. als de randvoorwaarden homogeen zijn. Substitutie van (3.3) geeft

$$\phi_{xx} \psi = \phi \psi_t,$$

zodat

$$\phi_{xx}/\phi = \psi_t/\psi = \text{constant} (= -\lambda^2).$$

Stellen we dus

$$(3.4) \quad \phi_{xx} + \lambda^2 \phi = 0, \quad \psi_t + \lambda^2 \psi = 0,$$

dan wordt alvast aan de voorwaarde bij $x = 0$ voldaan door de keuze

$$(3.5) \quad \phi = A \sin \lambda x.$$

Opdat ook aan de voorwaarde bij $x = a$ voldaan is moet gelden

$$(3.6) \quad \sin \lambda a = 0,$$

zodat voor de tot dusver onbepaald gelaten constante λ slechts de volgende waarden in aanmerking komen

$$(3.7) \quad \lambda_n = n\pi/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Voor ϕ en ψ vinden we dienovereenkomstig

$$(3.8) \quad \phi_n(x) = \sin n\pi x/a, \quad \psi_n(t) = \exp - n^2 \pi^2 t/a^2.$$

De volgens (3.3) bepaalde bouwstenen zijn dus

$$(3.9) \quad u_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 t/a^2} \sin n\pi x/a.$$

Door lineaire superpositie kunnen we hieruit de volgende algemene oplossing afleiden

$$(3.10) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 t/a^2} \sin n\pi x/a.$$

Voorzover convergentie dit toelaat voldoet de aldus geconstrueerde oplossing zowel aan de warmtevergelijking als aan de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = a$.

Het sluitstuk is te zorgen dat ook aan de beginvoorwaarde bij $t = 0$ voldaan is. Door deze eis zijn tenslotte de coëfficiënten a_n van (3.10) bepaald. Substitutie geeft zonder meer

$$(3.11) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x/a.$$

Dit is het probleem een gegeven functie te ontwikkelen in een Fourier reeks. De theorie van dergelijke reeksen zal heel kort in de volgende paragraaf samengevat worden. Voor de coëfficiënten a_n vinden we uiteindelijk

$$(3.12) \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin n\pi t/a \, dt.$$

We beschouwen hiernaast het overeenkomstige probleem voor een oneindig lange staaf $0 < x < \infty$.

De randvoorwaarden zijn dan

$$(3.13) \quad \begin{aligned} u &= 0 & \text{voor} & \quad x = 0, \\ u &= 0 & \text{voor} & \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De beginvoorwaarde is

$$(3.14) \quad u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

In overeenstemming met (3.4) en (3.5) kunnen we trachten de gezochte oplossing op te bouwen uit bouwstenen van de vorm

$$(3.15) \quad e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x.$$

Er is voldaan aan de p.d.v. en aan de randvoorwaarde bij $x = 0$. Voor $x \rightarrow \infty$ deugt deze oplossing niet. Omdat evenwel een periodieke functie begrensd is en een sinus gemiddeld nul is kan men terecht hopen er verder mee te komen. In tegenstelling tot de situatie bij een eindige staaf wordt λ niet nader beperkt en kan dus alle reële waarden aannemen. Aangezien de sinus oneven is kunnen we ons beperken tot positieve waarden van λ . Lineaire superpositie geeft nu een integraalvoorstelling

$$(3.16) \quad u(x, t) = \int_0^\infty g(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x \, d\lambda.$$

Aanpassing aan de beginvoorwaarde geeft

$$(3.17) \quad f(x) = \int_0^\infty g(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda.$$

Dit is het probleem een gegeven functie voor te stellen als een Fourier integraal. De behandeling van dit probleem stellen we uit tot later, maar we vermelden wel de zogenaamde omkeerformule van (3.17) waardoor de gezochte coëfficiëntenfunctie $g(\lambda)$ voorgesteld wordt als een soortgelijke Fourier integraal van de beginfunctie $f(x)$

$$(3.18) \quad g(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \lambda x \, dx.$$

4. Fourier reeksen

Bij het probleem een functie $f(x)$ te ontwikkelen in een trigonometrische reeks

$$(4.1) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

beperken we ons tot de klasse van functies van begrensde variatie. Een functie $f(x)$ heet per definitie een functie van begrensde variatie in het interval (a,b) indien voor alle onderverdelingen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

de sommen

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

uniform begrensd zijn.

Het is duidelijk dat een monotone functie er een van begrensde variatie is. Ook het verschil van twee monotone functies behoort tot deze klasse. Men kan, overigens op eenvoudige wijze, bewijzen dat een functie van begrensde variatie altijd opgevat kan worden als het verschil van twee monotone functies.

In elk punt $x = \xi$ van het definitie-gebied van een monotone functie, en ook van een functie van begrensde variatie, bestaan zowel linkerlimiet als rechterlimiet welke geschreven worden als $f(\xi - 0)$ en $f(\xi + 0)$. We merken hierbij even op dat een continue functie niet noodzakelijk van begrensde variatie is. Een differentieerbare functie met een continue afgeleide behoort daarentegen wel tot de genoemde klasse.

We beginnen met het eenvoudigste geval dat het rechterlid van (4.1) uniform convergeert. De somfunctie $f(x)$ is dan continu en verder natuurlijk periodiek met de periode 2π . Bij de discussie van de reeksvoorstelling (4.1) kunnen we dus volstaan met een x -interval van de grootte 2π te nemen. Wij kiezen hier het interval $-\pi \leq x \leq \pi$,

maar we hadden net zo goed ook het interval $(0, 2\pi)$ kunnen nemen.

Lemma 4.1

$$(4.2a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn}, \quad m + n > 0,$$

$$(4.2b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn},$$

$$(4.2c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$

waarbij m en n niet-negatieve gehele getallen zijn en waarbij het Kronecker symbool δ_{mn} gedefiniëerd is als

$$(4.3) \quad \begin{cases} \delta_{mn} = 0 & \text{voor } m \neq n, \\ \delta_{mn} = 1 & \text{voor } m = n. \end{cases}$$

Bewijs

De verificatie van de betrekkingen (4.2), berustend op eenvoudige expliciete integratie, zij aan de lezer overgelaten.

Uit deze zgn. orthogonaliteitseigenschappen volgen voor de reeks (4.1) de coëfficiënten formules

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

(4.4)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Is namelijk $f(x)$ de som van de uniform convergente reeks (4.1) dan kunnen we bijv. met $\cos nx$ vermenigvuldigen en term voor term integreren. Uit (4.2a) en (4.2c) volgt dat alleen de term met de coëfficiënt a_n een bijdrage levert waaruit de coëfficiënt formule voor a_n onmiddellijk voortvloeit. De formule blijft geldig voor $n = 0$ en het is om deze

reden dat in de reeks (4.1) begonnen werd met $\frac{1}{2} a_0$.

Is evenwel $f(x)$ een willekeurige, integreerbare, functie dan is het a priori niet zeker of $f(x)$ in het interval $(-\pi, \pi)$ wel door een Fourier reeks (4.1) voorgesteld kan worden. Zo dit wel het geval is weten we nog niets over de aard van de convergentie van deze reeks.

Voorbeeld 4.1

Uit de bekende reeksontwikkeling

$$-\ln(1-w) = \sum_{n=1}^{\infty} w^n/n$$

volgt voor $w = \exp - xi$ door van beide leden het imaginaire deel te nemen

$$\arg \ln(1 - \exp - xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$$

of

$$(4.5) \quad \frac{1}{2} (\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < \pi.$$

De convergentie van deze reeks is niet uniform.

Hoe dan ook, bij een willekeurige integreerbare functie $f(x)$ kunnen we de volgens (4.4) bepaalde Fourier coëfficiënten vormen en hiermede de reeks (4.1) samenstellen. Het fundamentele probleem ontstaat of de aldus ontstane reeks convergeert, en, zo ja, wanneer de somfunctie met $f(x)$, de uitgangsfunctie, overeenstemt.

Voor de praktijk hebben we meestal voldoende aan de volgende aan Jordan toegeschreven stelling.

Hoofdstelling

Is $f(x)$ periodiek met de periode 2π en is $f(x)$ over zijn periode van begrensde variatie dan geldt voor alle x

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

waarbij a_n , b_n de Fourier coëfficiënten zijn.

Voorbeeld 4.2

Voor de oneven functie $f(x)$ gedefiniëerd door

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi - x) & \text{voor } -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{voor } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

en verder periodiek met periode 2π geldt volgens (4.4)

$$a_n = 0, \quad b_n = 1/n.$$

Het resultaat is de reeks (4.5). Volgens de zojuist geformuleerde stelling convergeert de reeks altijd. Voor $x = 0$ is $f(x)$ discontinu, maar $\frac{1}{2} \{f(+0) + f(-0)\} = 0$ hetgeen ook de waarde van de reeks, voor $x = 0$ is.

Het bewijs van de hoofdstelling berust op een aantal resultaten van de klassieke analyse met als belangrijkste de zgn. tweede middelwaardestelling of stelling van Bonnet.

Lemma 4.2 (Bonnet)

Is $f(x)$ monotoon en $\phi(x)$ integreerbaar voor $a \leq x \leq b$ dan geldt

$$(4.7) \quad \int_a^b f(x)\phi(x)dx = f(a) \int_a^\theta \phi(x)dx + f(b) \int_\theta^b \phi(x)dx,$$

met $a < \theta < b$.

Bewijs

Het is voldoende om aan te nemen dat $f(x)$ monotoon daalt. De betrekking (4.7) kan geschreven worden als

$$\int_a^b \{f(x) - f(b)\}\phi(x)dx = \{f(a) - f(b)\} \int_a^\theta \phi(x)dx,$$

en we mogen dus ook veronderstellen dat $f(b) = 0$ is.

We stellen

$$\Phi(x) = \int_a^x \phi(\xi) d\xi$$

en merken op dat dit een continue functie is die voor $a \leq x \leq b$ alle waarden tussen zijn minimum m en zijn maximum M aanneemt. We verdelen het interval (a, b) in n gelijke delen door tussenpunten $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{f(x) - f(x_k)\}\phi(x)dx + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(x)dx.$$

De eerste som in het rechterlid convergeert tot nul voor $n \rightarrow \infty$ als n^{-1} . Is immers $|\phi(x)| < K$ dan heeft men

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| |\phi(x)| dx &< \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_k) - f(x_{k+1})\} K(b-a)/n = \\ &= K(b-a) f(a)/n = O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Voor de tweede som in het rechterlid schrijven we

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \{\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\} = \sum_{k=1}^n \phi(x_k) \{f(x_{k-1}) - f(x_k)\}.$$

Vervangen we hierin $\phi(x_k)$ door M resp. m dan gaat het rechterlid over in $Mf(a)$ resp. $mf(a)$.

Samenvattend geldt dus

$$mf(a) + O(n^{-1}) \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq Mf(a) + O(n^{-1}).$$

Voor $n \rightarrow \infty$ verdwijnt de orde-term en neemt $\int_a^b f(x)\phi(x)dx/f(a)$ een waarde aan tussen het minimum en het maximum van de continue functie $\phi(x)$. Er is dus een waarde θ waarbij voor $\phi(\theta)$ de juiste waarde wordt aangenomen. Er geldt derhalve

$$\int_a^b f(x) \phi(x) dx = f(a) \int_a^\theta \phi(x) dx.$$

Lemma 4.3

Is $f(x)$ van begrensde variatie voor $a \leq x \leq b$ dan geldt

$$(4.8) \quad \int_a^b f(x) e^{\omega x i} dx = O(\omega^{-1}) \quad \text{voor } \omega \rightarrow \infty.$$

Bewijs

Alvorens dit te bewijzen merken we op dat de in (4.8) gebruikte complexe notatie een handige manier is om een cosinusintegraal en een sinusintegraal in een enkele vorm samen te vatten. De betekenis van het gebruikte orde symbool is a.v.

$$g(\omega) = O\{h(\omega)\} \quad \text{voor } \omega \rightarrow \infty$$

impliceert het bestaan van een positieve constante C zodanig dat vanaf een zekere ω_0

$$|g(\omega)| < C|h(\omega)| \quad \text{voor } \omega > \omega_0.$$

Het is voldoende (4.8) te bewijzen voor een monotone functie. Beperken we ons tot de cosinusversie dan is volgens (4.7)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos \omega x dx \right| &\leq |f(a)| \left| \int_a^\theta \cos \omega x dx \right| + \\ &+ |f(b)| \left| \int_\theta^b \cos \omega x dx \right| \leq \frac{2}{\omega} \{ |f(a)| + |f(b)| \}. \end{aligned}$$

Lemma 4.4

$$(4.9) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \pi.$$

Bewijs

Beschouw de functie

$$F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{voor } a \geq 0.$$

Zonder bewijs vermelden we dat $F(a)$ continu in $a = 0$ is, zodat

$$F(0) = \lim_{a \rightarrow 0} F(a).$$

Differentiatie van $F(a)$ leidt tot een gemakkelijk te berekenen integraal

$$F'(a) = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx = \frac{-1}{a^2 + 1}.$$

Hieruit volgt

$$F(a) = \arccot a + C.$$

De integratieconstante C volgt uit het gedrag van $F(a)$ voor $a \rightarrow \infty$.

Aangezien $F(\infty) = 0$ is $C = 0$. Tenslotte is

$$F(0) = \arccot 0 = \frac{1}{2} \pi.$$

Lemma 4.5 (Dirichlet)

Is $f(x)$ van begrensde variatie in het interval $0 \leq x \leq a$ dan geldt

$$(4.10) \quad \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx \rightarrow \frac{1}{2} \pi f(+0) \quad \text{voor } \omega \rightarrow +\infty.$$

Bewijs

Het is voldoende deze stelling te bewijzen voor een positieve stijgende functie. We beschouwen eerst het geval $f(x) \equiv 1$. Dan is

$$\int_0^a \frac{\sin \omega x}{x} dx = \int_0^{a\omega} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \pi.$$

Op grond van dit resultaat is het voldoende om te bewijzen dat

$$\int_0^a \{f(x) - f(+0)\} \frac{\sin \omega x}{x} dx \rightarrow 0.$$

We kunnen dus voor het bewijs van (4.10) ons net zo goed beperken tot een positief stijgende functie $f(x)$ met $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Zij nu ε een willekeurig klein positief getal in $(0, a)$ dan schrijven we

$$\int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx = \int_0^\varepsilon f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx + \int_\varepsilon^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx.$$

Volgens de stelling van Bonnet geldt voor de eerste integraal van het rechterlid

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\varepsilon f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx \right| &= f(\varepsilon) \left| \int_0^\varepsilon \frac{\sin \omega x}{x} dx \right| = \\ &= f(\varepsilon) \left| \int_{0\omega}^{\varepsilon\omega} \frac{\sin x}{x} dx \right|. \end{aligned}$$

Aangezien de functie $\int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$ in verband met lemma 4.4 uniform begrensd is, zeg door een constante C , geldt de schatting

$$\left| \int_0^\varepsilon f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx \right| \leq 2 C f(\varepsilon)$$

hetgeen voor $\varepsilon \rightarrow 0$ willekeurig klein kan worden.

Bij de tweede term

$$\int_\varepsilon^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx$$

is met $f(x)$ ook $f(x)/x$ in $\varepsilon \leq x \leq a$ van begrensde variatie zodat hierop lemma 3 van toepassing is, d.w.z.

$$\int_\varepsilon^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx \rightarrow 0$$

voor $\omega \rightarrow \infty$.

Combinatie van beide resultaten geeft

$$\int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{x} dx \rightarrow 0,$$

waarmee het lemma bewezen is.

We zijn nu toe aan het bewijs van de hoofdstelling. Het is hierbij voordelig gebruik te maken van complexe notatie door te schrijven

$$(4.11) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nxi}, \quad -\pi < x < \pi.$$

In reële notatie staat er dus

$$(4.12) \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx \}.$$

Het verband met de notatie (4.1) is blijkbaar

$$(4.13) \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n).$$

De orthogonaliteitsrelaties (4.2) zijn in complexe notatie triviaal, nml.

$$(4.14) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{mxi} e^{-nxi} dx = 2\pi \delta_{mn}.$$

De complexe versie van (4.4) is

$$(4.15) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-nti} dt.$$

We vormen nu met de door (4.15) bepaalde coëfficiënten een eindige som van (4.11)

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{nxi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{n(x-t)i} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \sum_{n=-N}^N e^{-nti} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t)\} \frac{\frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt.
\end{aligned}$$

Op deze integraal is het lemma van Dirichlet van toepassing hetgeen onmiddellijk leidt tot

$$S_N(x) \rightarrow \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

5. Trigonometrische ontwikkelingen bij de warmtegeleiding in een staaf

We formuleren nog eens het in §3 beschouwde probleem. Hierbij kiezen we de lengte-eenheid zodanig dat $a = \pi$. De warmtevergelijking is

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi.$$

Probleem 5.1

$$u = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi,$$

$$u = f(x) \quad \text{voor } t = 0.$$

Separatie en aanpassing aan de randvoorwaarde leiden tot de speciale oplossingen

$$\sin nx \exp -n^2 t, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De oplossing schrijven we als

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \exp -n^2 t.$$

Aanpassing aan de beginvoorwaarde geeft

$$(5.1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi,$$

een zuivere Fourier reeks, waarbij volgens (3.12) of (4.4)

$$(5.2) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Bij het volgende probleem treedt op analoge wijze een cosinusreeks op.

Probleem 5.2

$$u_x = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi,$$

$$u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

De elementaire bouwstenen zijn

$$\cos nx \exp -n^2 t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De oplossing zij

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \exp -n^2 t.$$

De beginvoorwaarde vereist

$$(5.3) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$$

zodat volgens (4.4), waarbij $f(x)$ als een even functie geïnterpreteerd dient te worden,

$$(5.4a) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

en

$$(5.4b) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Het probleem is dat van een aan beide zijden geïsoleerde staaf. Voor $t \rightarrow \infty$ nadert de temperatuur blijkbaar tot a_0 , de gemiddelde begintemperatuur.

Probleem 5.3

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0,$$

$$u_x = 0 \quad \text{voor} \quad x = \pi,$$

$$u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

De elementaire bouwstenen zijn nu

$$\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \exp - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 t, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De oplossing zij

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \exp - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 t,$$

zodat nu

$$(5.5) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x,$$

hetgeen niet meer een zuivere Fourier reeks is. Met een trucje kan dit ontwikkelingsprobleem in het keurslijf van de theorie van de Fourier reeksen gewrongen worden - ontwikkel bijv. $f(x) \sin \frac{1}{2}x$ i.p.v. $f(x)$ - maar handiger is het om op te merken dat de functies $\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x$ aan de volgende orthogonaliteitsvoorwaarde voldoen

$$\int_0^{\pi} \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)x \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \, dx = \frac{1}{2} \pi \delta_{mn}, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1.$$

Aldus geldt

$$(5.6) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x \, dx.$$

In het vorige probleem kon de theorie van de Fourier reeksen nog net toegepast worden. In het nu volgende probleem lukt het niet meer.

Probleem 5.4

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{voor } x = 0, \\ u_x + hu &= 0 && \text{voor } x = \pi, \quad h > 0, \\ u &= f(x) && \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

We merken even op dat dit probleem voor $h \rightarrow 0$ resp. $h \rightarrow \infty$ overgaat in probleem 5.3 resp. 5.1. De bouwstenen zijn

$$\sin \lambda_n x \exp -\lambda_n^2 t,$$

waarbij ter aanpassing aan de randvoorwaarde bij $x = \pi$ vereist is dat

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + h\right) \sin \lambda x = 0 \quad \text{voor} \quad x = \pi,$$

zodat

$$(5.7) \quad \operatorname{tg} \lambda \pi = -\lambda/h.$$

Om een idee te krijgen van de aard van de wortels λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, van deze transcendente vergelijking kunnen we in het (λ, y) -vlak de tangenslijn $y = \operatorname{tg} \lambda \pi$ snijden met de rechte lijn $y = -\lambda/h$ (zie fig. 5.1). Grafisch blijken de door de snijpunten bepaalde wortels λ_n van de aard

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \delta_n, \quad 0 < \delta_n < 1,$$

te zijn waarbij $\delta_n \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$. Een nadere berekening geeft voor $n \rightarrow \infty$

$$\delta_n = \frac{h}{\pi(n - \frac{1}{2})} + O(n^{-3}).$$

De oplossing is nu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x \exp -\lambda_n^2 t,$$

hetgeen aanleiding geeft tot het ontwikkelingsprobleem

$$(5.8) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x.$$

Hierop is de theorie van de Fourier reeksen helaas niet meer van toepassing. Formeel blijft het eenvoudig omdat de functies

$\phi_n(x) = \sin \lambda_n x$ wederom aan een orthogonaliteitsvoorwaarde voldoen, nml.

$$(\phi_m, \phi_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x dx = 0 \quad \text{voor } m \neq n.$$

Inderdaad geldt voor $m \neq n$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^\pi \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x dx &= \int_0^\pi \cos(\lambda_m - \lambda_n)x dx - \int_0^\pi \cos(\lambda_m + \lambda_n)x dx \\ &= \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_n)\pi}{\lambda_m - \lambda_n} - \frac{\sin(\lambda_m + \lambda_n)\pi}{\lambda_m + \lambda_n} = \\ &= \cos \lambda_m \pi \cos \lambda_n \pi \left\{ \frac{\text{tg } \lambda_m \pi - \text{tg } \lambda_n \pi}{\lambda_m - \lambda_n} - \frac{\text{tg } \lambda_m \pi + \text{tg } \lambda_n \pi}{\lambda_m + \lambda_n} \right\} = \\ &= \frac{1}{h} \cos \lambda_m \pi \cos \lambda_n \pi \left\{ \frac{-\lambda_m + \lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} - \frac{-\lambda_m - \lambda_n}{\lambda_m + \lambda_n} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Formeel volgt uit (5.8) dus

$$(5.9) \quad a_n \int_0^\pi \sin^2 \lambda_n x dx = \int_0^\pi f(x) \sin \lambda_n x dx,$$

of na enige herleiding

$$(5.10) \quad \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{h}{h^2 + \lambda_n^2} \right) a_n = \int_0^\pi f(x) \sin \lambda_n x dx.$$

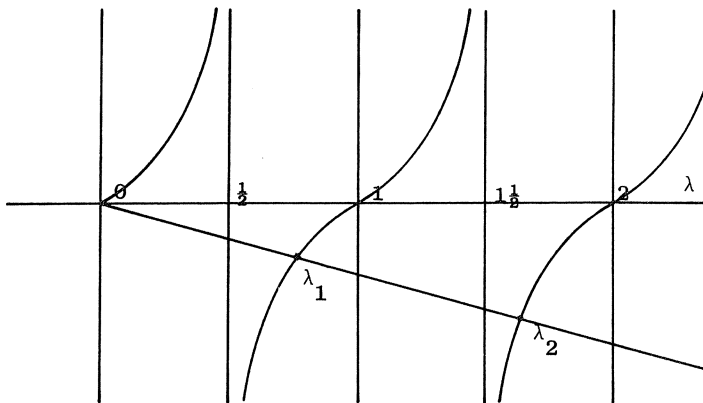


fig. 5.1

De in het laatste probleem optredende ontwikkeling past niet in de theorie van de Fourier reeksen, maar wel zijn hierop beschouwingen uit de theorie van de Hilbert ruimte van toepassing. Hierbij wordt de klasse $C(0, \pi)$ van continue functies $f(x)$, $g(x)$, etc., als een oneindig dimensionale vectorruimte opgevat met een inwendig product

$$(5.11) \quad (f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

In de meetkundige terminologie van een vectorruimte heten de vectoren f en g orthogonaal als $(f, g) = 0$. De kwadraatlengte van een vector f wordt gedefiniëerd als (f, f) . De wortel hieruit heet de norm

$$(5.12) \quad ||f|| \stackrel{\text{def}}{=} (f, f)^{1/2}.$$

Een operator A werkend in deze functieruimte heet symmetrisch indien voor elk paar f, g voldaan is aan

$$(5.13) \quad (Af, g) = (f, Ag).$$

Een dergelijke operator heet bovendien positief indien steeds

$$(5.14) \quad (Af, f) > 0 \quad \text{mits} \quad f \neq 0.$$

Een operator A heeft per definitie een eigenfunctie ϕ bij een eigenwaarde λ , indien

$$(5.15) \quad A\phi = \lambda\phi.$$

Voor een symmetrische en positieve operator gelden de volgende eigenschappen.

- a. De eigenwaarden λ zijn reëel en positief.
- b. De bij verschillende eigenwaarden behorende eigenfuncties zijn orthogonaal.

Bewijs

- a. Uit (5.15) volgt

$$(A\phi, \phi) = (\lambda\phi, \phi) = \lambda(\phi, \phi)$$

zodat λ reëel is en i.v.m. (5.14)

$$\lambda = \frac{(A\phi, \phi)}{(\phi, \phi)} > 0.$$

b. Uit $A\phi = \lambda\phi$ en $A\psi = \mu\psi$ volgt

$$\lambda(\phi, \psi) = (A\phi, \psi) = (\phi, A\psi) = \mu(\phi, \psi),$$

zodat $(\phi, \psi) = 0$.

Onder bepaalde omstandigheden, waarop we hier niet nader kunnen ingaan, vormen de bij een operator behorende eigenfuncties een aftelbare reeks ϕ_n van basisvectoren op een zodanige wijze dat een willekeurige vector f te schrijven is als

$$(5.16) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n.$$

De convergentie dient hierbij opgevat te worden in de zin van

$$(5.17) \quad \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\| \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad N \rightarrow \infty.$$

Bij theoretische beschouwingen denkt men de eigenvectoren genormeerd op de lengte 1, d.w.z. $(\phi_n, \phi_n) = 1$. In dat geval volgt uit (5.16) de coëfficiëntformule

$$(5.18) \quad a_n = (f, \phi_n),$$

meetkundig dus de projectie van f op de door de eenheidsvector ϕ_n bepaalde lijn. Een ander gevolg is de zgn. stelling van Parseval, een generalisatie van de stelling van Pythagoras

$$(5.19) \quad (f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)^2.$$

Toepassingen

In het algemene warmtegeleidingsprobleem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a < x < b,$$

met de homogene randvoorwaarden

$$u_x - h_a u = 0 \quad \text{voor} \quad x = a, \quad h_a > 0,$$

$$u_x + h_b u = 0 \quad \text{voor} \quad x = b, \quad h_b > 0,$$

en met de beginvoorwaarde

$$u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0,$$

stellen we volgens de separatiemethode

$$u = \phi(x) \exp -\lambda t,$$

waarmee de warmtevergelijking overgaat in

$$A\phi = \lambda\phi$$

met

$$A = - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

werkend op functies welke voldoen aan de bij $x = a$ en $x = b$ geldende randvoorwaarden.

We laten zien dat de operator A inderdaad symmetrisch en positief is.

$$\begin{aligned} (A\phi, \psi) &= - \int_a^b \phi'' \psi \, dx = - (\phi' \psi)_a^b + \int_a^b \phi' \psi' \, dx = \\ &= h_b \phi(b) \psi(b) + h_a \phi(a) \psi(a) + \int_a^b \phi' \psi' \, dx. \end{aligned}$$

Uit $(\phi, A\psi)$ verkrijgt men inderdaad dezelfde uitdrukking. Is in het bijzonder $\psi = \phi$ dan is

$$(A\phi, \phi) = h_b \phi^2(b) + h_a \phi^2(a) + (\phi', \phi') > 0.$$

De eigenwaarden zijn dus reëel en positief. De ontwikkeling (5.16) met de coëfficiëntformule (5.18) is daarmee van toepassing.

1. Bij voorbeeld 4.1 is $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ met $\phi_n = \sin nx$. De genormeerde eigenfunctie is overigens $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$.

2. Bij voorbeeld 5.2 is $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ met $\phi_n = \cos nx$. De genormeerde eigenfunctie is analoog $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$.
3. Bij voorbeeld 5.3 is $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ met $\phi_n = \sin(n - \frac{1}{2})x$.
4. Bij voorbeeld 5.4 is λ_n bepaald door (5.7). De eigenfuncties zijn $\sin \lambda_n x$. De orthogonaliteit hiervan volgt uit bovenstaande algemene beschouwing.

De boven beschreven abstracte formulering is van veel wijdere strekking dan hier kan blijken. Ook bij soortgelijke warmtegeleidingsproblemen in twee en drie dimensies heeft men te maken met de ontwikkeling van een gegeven functie in een reeks van orthogonale eigenfuncties. In het algemeen is slechts voor een op een begreind gebied betrekking hebbend warmtegeleidingsprobleem sprake van een ontwikkeling in een reeks van het Fourier type. Voor een zich naar het oneindige uitstrekkend gebied treedt er i.h.a. een continu stelsel eigenwaarden, d.i. een continu spectrum, op. Het ontwikkelingsprobleem wordt daarbij van het type van een Fourier integraal.

6. Fourier integralen

Het continue analogon van een Fourier reeks is een Fourier integraal. De complexe notatie heeft hierbij geen voordelen en we noemen dan ook

$$(6.1) \quad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx$$

de (complexe) Fourier getransformeerde van de reële of complexe functie $f(x)$. De integraal in het rechterlid van (6.1) heet een Fourier integraal. We nemen, zoals gebruikelijk, aan dat $f(x)$ van begrensde variatie is, en dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Gemakshalve denken we $f(x)$ zodanig genormeerd dat overal

$$f(x) = \frac{1}{2} \{f(x-0) + f(x+0)\}.$$

De integraal (6.1) convergeert nu voor alle waarden van y en er geldt de omkeerformule

$$(6.2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy.$$

Het bewijs van deze hoogst belangrijke formule berust wederom op het in §4 bewezen lemma van Dirichlet (formule 4.10).

Bewijs

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\omega}^{\omega} \exp i(t-x)y dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(t-x)}{t-x} f(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \{f(t+x) + f(-t+x)\} \frac{\sin \omega t}{t} dt.$$

De in bovenstaande regels toegepaste verwisseling van integratievolgorde is geoorloofd wegens de absolute integreerbaarheid van $f(x)$ over $(-\infty, \infty)$. Het lemma van Dirichlet is nog niet zonder meer toepasbaar omdat de bovengrens van de integraal niet eindig is. Was dit wel het geval dan geeft de limietovergang inderdaad volgens (4.10) $f(x)$ als resultaat. De fout die gemaakt wordt door de bovengrens ∞ te vervangen door een willekeurig groot getal a is weer wegens de absolute integreerbaarheid van $f(x)$ willekeurig klein te maken. Toepassing van lemma 5 is dus geoorloofd ook met $a = \infty$.

In de praktijk heeft men vaak te maken met even of oneven functies.

Is $f(x)$ even dan kunnen we de complexe Fourier integraal a.v. in reële vorm brengen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx = \int_0^{\infty} (e^{ixy} + e^{-ixy}) f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos xy f(x) dx.$$

Met een kleine wijziging, d.w.z. met verwerking van een factor 2, kunnen we het paar (6.1) en (6.2) vervangen door

$$(6.3) \quad g(y) = \int_0^{\infty} \cos xy f(x) dx,$$

$$(6.4) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xy g(y) dy.$$

De volgens (6.3) gedefiniëerde functie noemt men de cosinus-getransformeerde van $f(x)$.

Is $f(x)$ oneven dan komt er op analoge wijze

$$(6.5) \quad g(y) = \int_0^{\infty} \sin xy f(x) dx,$$

$$(6.6) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xy \, g(y) \, dy.$$

De door (6.5) gedefiniëerde functie heet de sinus-getransformeerde van $f(x)$.

Voorbeeld 6.1

De cosinus-getransformeerde van $f(x) = (x^2 + a^2)^{-1}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos xy \, (x^2 + a^2)^{-1} \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \, (x^2 + a^2)^{-1} \, dx = \\ &= \frac{\pi}{2a} \exp - a|y|. \end{aligned}$$

Voorbeeld 6.2

De sinus-getransformeerde van $f(x) = x(x^2 + a^2)^{-1}$.

Voor $y > 0$ is

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin xy \, x(x^2 + a^2)^{-1} \, dx &= - \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} \cos xy \, (x^2 + a^2)^{-1} \, dx = \\ &= - \frac{d}{dy} \frac{\pi}{2a} \exp - ay = \frac{\pi}{2} e^{-ay}. \end{aligned}$$

Voor $y < 0$ is het resultaat wegens het oneven karakter van de integraal natuurlijk $-\frac{\pi}{2} e^{ay}$.

7. Warmtegeleiding in een oneindig lange staaf

We beschouwen een oneindig lange staaf $-\infty < x < \infty$, waarin de warmtevergelijking geldt

$$u_{xx} = u_t$$

met de beginvoorwaarde

$$u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Randvoorwaarden zijn er fysisch gesproken niet. Bij het, in feite geïdealiseerde, mathematische model eist men dat u voor $x \rightarrow \pm \infty$ begrensd is.

Volgens de separatiemethode kan de oplossing opgebouwd worden uit de bouwstenen

$$\exp(i\lambda x - \lambda^2 t),$$

waarbij λ reëel is maar verder niet aan enige beperking gebonden.

De algemene oplossing verschijnt nu niet in reeksvorm maar in integraalvorm

$$(7.1) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) e^{i\lambda x - \lambda^2 t} d\lambda,$$

met een nader te bepalen coëfficiëntformule $a(\lambda)$.

Aanpassing aan de beginvoorwaarde vereist

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} a(\lambda) d\lambda,$$

zodat $f(x)$ de complexe Fourier getransformeerde van $a(\lambda)$ is. Volgens

(6.2) geldt i.h.a. de omkeerformule

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi.$$

Substitueren we dit in (7.1) dan komt er

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-\xi) - \lambda^2 t} f(\xi) d\xi.$$

We verwisselen hierin de volgorde van integratie en passen de volgende formule toe.

Lemma 7.1

$$(7.2) \quad \int_0^{\infty} \cos \lambda a e^{-\lambda^2 b} d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\pi}{b} \exp - \frac{a^2}{4b}, \quad b > 0.$$

Bewijs

Noem het linkerlid $\phi(a)$ dan geldt

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{da} &= - \int_0^{\infty} \lambda \sin \lambda a e^{-\lambda^2 b} d\lambda = \frac{1}{2b} \int_0^{\infty} \sin \lambda a d e^{-\lambda^2 b} = \\ &= - \frac{a}{2b} \int_0^{\infty} \cos \lambda a e^{-\lambda^2 b} d\lambda = - \frac{a}{2b} \phi. \end{aligned}$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking

$$2b \frac{d\phi}{da} + a\phi = 0$$

is gelijk aan

$$\phi(a) = C \exp - \frac{a^2}{4b}.$$

De waarde van C volgt uit de gemakkelijk te verifiëren eigenschap

$$\phi(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

Als resultaat van deze toepassing vinden we de oplossing in de vorm

$$(7.3) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp - \frac{(\xi - x)^2}{4t} d\xi.$$

De boven gegeven afleiding is alleen geldig voor het geval dat $f(x)$ voldoet aan de vereisten van de Fourier transformatie, dus bijv. absolute integreerbaarheid. Men kan zich evenwel gemakkelijk ervan overtuigen dat (7.3) ook voor een uitgebreidere functieklassie geldt. Nemen we aan dat $f(x)$ in het oneindige begrensd is dan bestaat het rechterlid van (7.3) stellig voor $t > 0$. We laten nu zien dat inderdaad $u(x,t) \rightarrow f(x)$ voor $t \rightarrow 0$. Daartoe schrijven we (7.3) in de vorm

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2\mu\sqrt{t}) e^{-\mu^2} d\mu \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mu^2} d\mu = f(x). \end{aligned}$$

De speciale keuze $f(x) = \delta(x)$, waarbij, zoals gebruikelijk in de theorie van de distributies, de zgn. deltafunctie van Dirac $\delta(x)$ gekarakteriseerd wordt door de eigenschap

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0)$$

voor elke continue functie ϕ , leidt tot de speciale oplossing

$$(7.4) \quad G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{x^2}{4t}.$$

Er geldt dus

$$(7.5) \quad G(x,t) \rightarrow \delta(x) \quad \text{voor } t \rightarrow +0.$$

Het fysisch evidente feit dat de totale warmte bij diffusie in een oneindig lange staaf constant is volgt mathematisch uit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx = G_x \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

De speciale keuze $f(x) = \operatorname{sgn} x$, d.w.z. de functie gedefiniëerd als

$$(7.5) \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{voor } x > 0 \\ 0 & \text{voor } x = 0 \\ -1 & \text{voor } x < 0, \end{cases}$$

leidt na enig elementair gereken tot

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}xt^{-1/2}} e^{-\xi^2} d\xi,$$

of, in de notatie van de error functie

$$(7.6) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

$$(7.7) \quad u(x,t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

Van de hierboven gedefiniëerde error functie vermelden we nog even enkele gemakkelijk te verifiëren eigenschappen. De error functie is oneven en stijgt monotoon van -1 tot +1, dus i.h.b.

$$\operatorname{erf} \infty = 1.$$

De machtreeksontwikkeling is

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \operatorname{erf} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \dots$$

Vaak gebruikt men ook de complementaire error functie $\operatorname{erfc} x$ welke gedefiniëerd wordt door

$$(7.8) \quad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \operatorname{erf} x.$$

8. Warmtegeleiding in een half-oneindige staaf

Dit probleem wordt beschreven door de warmtevergelijking $u_{xx} = u_t$ in het interval $0 < x < \infty$ met de beginvoorwaarde $u = f(x)$ voor $t = 0$ en bovendien een randvoorwaarde bij $x = 0$. We beginnen met het volgende probleem

$$(8.1) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t & \text{voor } 0 < x < \infty, \\ u = f(x) & \text{voor } t = 0, \\ u = 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Dit probleem kunnen we gemakkelijk terugbrengen tot het probleem van de vorige paragraaf door gebruik te maken van het zogenaamde spiegelsprincipe. Daartoe vatten we $f(x)$ op als een oneven functie die dus voor $x < 0$ gedefiniëerd wordt als $-f(-x)$ en we beschouwen het probleem van de warmtegeleiding in een oneindig lange staaf $-\infty < x < \infty$ met de uitgebreide beginfunctie $f(x)$. Dit probleem heeft de oplossing (7.3). Aangezien $u(x,t)$ oneven is voor een oneven beginfunctie is automatisch aan de randvoorwaarde $u = 0$ bij $x = 0$ voldaan. De oplossing van (8.1) is dus

$$(8.2) \quad u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{ \exp - \frac{(\xi-x)^2}{4t} - \exp - \frac{(\xi+x)^2}{4t} \right\} d\xi.$$

De speciale keuze $f(x) \equiv 1$ leidt via de oneven voortzetting $\operatorname{sgn} x$ tot de oplossing (7.7) of

$$(8.3) \quad u(x,t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

Als curiositeit vermelden we dat deze oplossing ook op een geheel andere wijze verkregen kan worden. Daartoe zoeken we oplossingen van de warmtevergelijking van de zeer specifieke vorm

$$(8.4) \quad u = F(x^\alpha t^\beta),$$

waarbij α en β nader te bepalen exponenten zijn. Stellen we

$$z = x^\alpha t^\beta$$

dan kunnen we $u_{xx} = u_t$ herleiden tot

$$\frac{\alpha^2 z^2 F_{zz} + \alpha(\alpha - 1)z F_z}{x^2} = \frac{\beta z F_z}{t}.$$

Dit gaat over in een gewone differentiaalvergelijking met slechts de onafhankelijk variabele z indien de combinatie x^2/t met z in verband kan worden gebracht. We kiezen daartoe $\alpha = 2$, $\beta = -1$, waardoor de volgende vergelijking ontstaat

$$4z F_{zz} + (z + 2)F_z = 0.$$

Zonder moeite volgt hieruit

$$F_z = cz^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}z},$$

en vervolgens

$$F = c \int_0^z \zeta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\zeta} d\zeta + c',$$

waarbij c en c' integratieconstanten zijn.

Uit $F = 0$ voor $x = 0$ volgt $c' = 0$. We kunnen nu schrijven, met een iets andere constante c ,

$$F = c \operatorname{erf} \frac{1}{2}\sqrt{z}.$$

De voorwaarde $F = 1$ voor $t = 0$, d.w.z. voor $z \rightarrow \infty$ leidt tenslotte tot $c = 1$ in overeenstemming met (8.3).

Het probleem

$$(8.5) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t & \text{voor } 0 < x < \infty, \\ u = f(x) & \text{voor } t = 0, \\ u_x = 0 & \text{voor } x = 0, \end{cases}$$

leidt op analoge wijze, maar nu met even spiegeling $f(x) = f(-x)$,

tot de oplossing

$$(8.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{ \exp - \frac{(\xi-x)^2}{4t} + \exp - \frac{(\xi+x)^2}{4t} \right\} d\xi.$$

Het probleem

$$(8.7) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t & \text{voor } 0 < x < \infty, \\ u = f(x) & \text{voor } t = 0, \\ u_x = hu & \text{voor } x = 0, h > 0, \end{cases}$$

is een generalisatie van de beide vorige problemen die corresponderen met de speciale gevallen $h = \infty$ en $h = 0$. Het spiegelsprincipe lukt hier niet meer. Men kan trachten een zodanige voortzetting van $f(x)$ voor $x < 0$ te bepalen dat weer de oplossing (7.3) van toepassing is. We stellen dus

$$(8.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ f(\xi) \exp - \frac{(\xi-x)^2}{4t} + g(\xi) \exp - \frac{(\xi+x)^2}{4t} \right\} d\xi,$$

waarbij $g(x)$ een nader te bepalen functie is.

Uit (8.8) volgt gemakkelijk voor $x = 0$

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (f + g) \exp - \frac{\xi^2}{4t} d\xi,$$

en

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (f_\xi - g_\xi) \exp - \frac{\xi^2}{4t} d\xi.$$

De randvoorwaarde bij $x = 0$ eist dat voor alle waarden van t

$$\int_0^\infty \left\{ (f_\xi - hf) - (g_\xi + hg) \right\} \exp - \frac{\xi^2}{4t} d\xi = 0.$$

Hieraan is stellig voldaan als

$$(8.9) \quad f_\xi - hf = g_\xi + hg.$$

Uit deze differentiaalvergelijking voor de onbekende functie $g(x)$ kan $g(x)$ zonder moeite opgelost worden. Aangezien $g(0) = f(0)$ volgt uit (8.9)

$$(8.10) \quad g(x) = f(x) - 2h \int_0^x e^{-h(x-\xi)} f(\xi) d\xi.$$

De oplossing van het gestelde probleem is nu bepaald door (8.8) en (8.10).

Er is nog een andere methode om het probleem (8.7) op te lossen. Daartoe beschouwen we

$$(8.11) \quad v = u - \frac{1}{h} u_x$$

als nieuwe afhankelijk variabele. Het probleem wordt nu vertaald in

$$(8.12) \quad \begin{cases} v_{xx} = v_t & \text{voor } 0 < x < \infty, \\ v = f - f_x/h & \text{voor } t = 0, \\ v = 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Dit probleem is identiek met (8.1) zodat dus $v(x,t)$ expliciet als de integraal in (8.2) bekend is. Uit $v(x,t)$ kunnen we $u(x,t)$ terugvinden door de differentiaalvergelijking (8.11) op te lossen.

De algemene oplossing van (8.11) is

$$u(x,t) = h \int_0^\infty v(x+\xi,t) e^{-h\xi} d\xi + Ce^{hx}$$

met integratieconstante C . Uit de fysisch evidente eis dat $u(x,t)$ begrensd blijft voor $x \rightarrow \infty$ - de randvoorwaarde op oneindig - volgt $C = 0$.

De expliciete vorm van $u(x,t)$ leiden we nog voor het speciale geval $f(x) = 1$ af. In dat geval levert (8.10)

$$g(x) = -1 + 2e^{-hx}.$$

Substitutie in (8.8) geeft

$$u(x, t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{(\xi+x)^2}{4t} + h\xi \right\} d\xi,$$

of na enige herleiding

$$(8.13) \quad u(x, t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{t}} + h\sqrt{t} \right\} \exp(hx + h^2 t).$$

9. Principe van Duhamel

Volgens Duhamel (1833) kan een warmtegeleidingsprobleem, waarbij de randvoorwaarde van de tijd afhangt, op de volgende wijze worden opgelost. We beschouwen weer het mathematische model van de half-on-eindige staaf $0 < x < \infty$ beschreven door

$$(9.1) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t & \text{voor } 0 < x < \infty, \\ u = 0 & \text{voor } t = 0, \\ u = \phi(t) & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

We lossen dit probleem eerst op voor het speciale geval $\phi(t) \equiv 1$. Stellen we $u = 1 - v$ dan geldt voor v precies het probleem (8.1) met $f(x) \equiv 1$. De oplossing hiervan was gegeven in (8.3) zodat volgens de definitie (7.8) van de complementaire error functie (9.1) opgelost wordt door

$$(9.2) \quad u = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

De algemene oplossing van (9.1), d.w.z. voor willekeurige $\phi(t)$, kan gemakkelijk uit de voorgaande speciale oplossing verkregen worden door lineaire superpositie. Daartoe schrijven we in de notatie van de gegeneraliseerde functies

$$(9.3) \quad \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \theta(t-\tau) \phi(\tau) d\tau,$$

waarbij $\theta(t)$ de eenheidssprongfunctie

$$(9.4) \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t > 0, \\ 0 & \text{voor } t < 0, \end{cases}$$

soms aangevuld met de normering $\theta(0) = \frac{1}{2}$, is. T.a.v. de ontbinding (9.3) merken we op dat dit in feite de splitsing van $\phi(t)$ in infinitesimale rechthoekjes voorstelt, zie fig. 9.1.

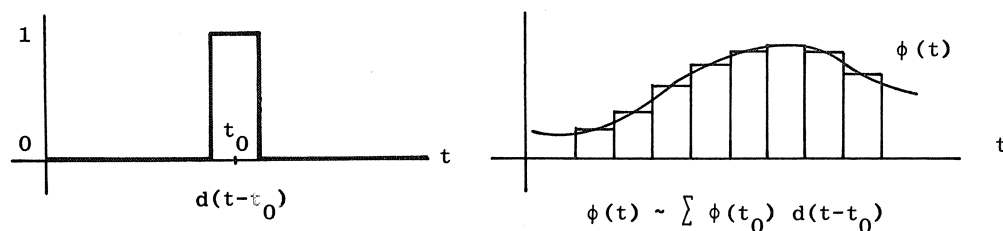


fig. 9.1

Zoals we hebben gezien is de oplossing van (9.1) voor $\phi(t) = \theta(t)$ gegeven door (9.2), laten we kortheidshalve zeggen door $F(x, t)$. De oplossing van (9.1) voor de uitgestelde sprongfunctie $\phi(t) = \theta(t - t_0)$ is natuurlijk $F(x, t - t_0)$. Volgens (9.2) is de oplossing voor algemene $\phi(t)$ dan

$$(9.5) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} F(x, t - \tau) \phi(\tau) d\tau.$$

Aangezien bij (9.1) $\phi(t) = 0$ voor $t < 0$ en $F(x, t) = 0$ voor $t < 0$ is het rechterlid van (9.5) in feite een integraal met de eindige grenzen $\tau = 0$ en $\tau = t$. Substitutie van (9.2) levert dan expliciet als oplossing van (9.1)

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \phi(\tau) (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} \exp - \frac{x^2}{4(t - \tau)} d\tau,$$

of na enige herleiding

$$(9.6) \quad u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} \phi\left(t - \frac{x^2}{4\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

De verificatie van de beginvoorwaarde en van de randvoorwaarde bij deze laatste uitdrukking kost geen moeite.

Uit het bovenstaande blijkt wel dat het principe van Duhamel als variant van het superpositiebeginsel van zeer algemene aard is

en bijv. ook toegepast kan worden bij ingewikkelder, twee- en drie-dimensionale, warmtegeleidingsproblemen. Essentiëel voor de toepassing van het principe van Duhamel is het nul zijn van de begintemperatuur. Hoe men moet handelen indien dit niet het geval is leert onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 9.1

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & \text{voor } 0 < x < \infty, \\ u = f(x) & \text{voor } t = 0, \\ u = \phi(t) & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

We stellen $u = u_1 + u_2$ waarbij u_1 en u_2 elk aan de warmtevergelijking voldoen en waarbij

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x) \quad , \quad u_2 = 0 & \text{voor } t = 0 \quad , \quad \text{en} \\ u_1 &= 0 \quad , \quad u_2 = \phi(t) & \text{voor } x = 0. \end{aligned}$$

Blijkbaar wordt u_1 gegeven door (8.2) als oplossing van (8.1) en u_2 door (9.6) als oplossing van (9.1).

10. Warmtegeleiding in een eindige staaf

We beschouwen het mathematische model van de warmtegeleiding $u_{xx} = u_t$ in het eindige interval $0 < x < a$ met de beginvoorwaarde $u = f(x)$ voor $t = 0$ en met zekere randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = a$. Problemen van dit type zijn in §5 behandeld met behulp van de theorie van de Fourier reeksen. In deze paragraaf laten we zien hoe bij deze problemen het spiegelsprincipe en het beginsel van Duhamel toegepast kunnen worden. We beginnen met het probleem dat als 5.1 in §5 reeds opgelost is.

Probleem 10.1

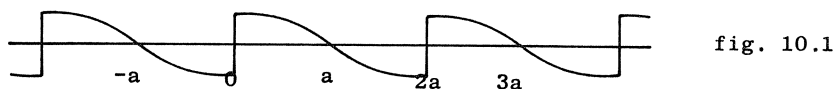
$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{voor } x = 0 \text{ en } x = a, \\ u &= f(x) && \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

Als in §8 brengen we dit probleem tot het overeenkomstige voor een oneindig lange staaf terug door $f(x)$ als een oneven functie op de volgende wijze periodiek voort te zetten (zie fig. 10.1)

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x+2a) = f(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Deze voortzetting impliceert oneven spiegeling zowel bij $x = 0$ als bij $x = a$. Inderdaad is

$$f(2a-x) = f(-x) = -f(x).$$



De oplossing van het gestelde probleem wordt weer door (7.3) gegeven. We schrijven deze uitdrukking als

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{ka}^{(k+1)a} f(\xi) \exp - \frac{(\xi-x)^2}{4t} d\xi.$$

Op grond van de symmetrieën van $f(\xi)$ kunnen we dit herleiden tot

$$(10.1) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^a f(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp - \frac{(x-\xi-2ka)^2}{4t} - \exp - \frac{(x+\xi-2ka)^2}{4t} \right\} d\xi.$$

In het speciale geval van een momentane puntbron op de plaats $x = x_0$, d.w.z. $f(x) = \delta(x - x_0)$, kunnen we met de notatie (7.4) de oplossing (10.1) schrijven als (zie fig. 10.2)

$$(10.2) \quad u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{G(x - x_0 - 2ka, t) - G(x + x_0 - 2ka, t)\}.$$

In §5 is de oplossing (10.1) afgeleid in de vorm

$$(10.3) \quad u(x, t) = \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} \exp - n^2 \pi^2 t / a^2 d\xi$$

of met $f(x) = \delta(x - x_0)$ als

$$(10.4) \quad u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \exp - \frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}.$$

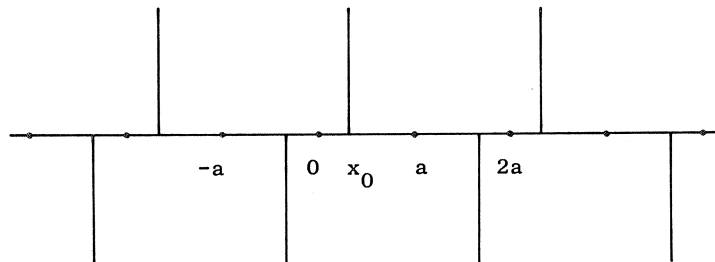


fig. 10.2

De reeksvoorstellingen (10.1) en (10.3) zijn equivalent en evenzo (10.2) en (10.4). Van deze equivalentie kan men ook een rechtstreeks bewijs leveren, bijv. met residuekening. In de praktijk zijn reeksen van het type (10.3) alleen bruikbaar als t niet zo klein is dat vele termen van de reeks gesommeerd moeten worden om tot een aanvaardbare nauwkeurigheid te komen. Voor grote waarden van t zorgen de exponentiële factoren voor een snelle numerieke convergentie. Voor $t \rightarrow 0$ zijn de rechterleden van (10.3) en (10.4) numeriek ongeschikt. In dat

geval zijn juist de reeksvoorstellingen (10.1) en (10.2) bijzonder bruikbaar. Voor praktische berekeningen zijn dus beide voorstellingen van belang.

Probleem 10.2

$$\begin{aligned} u_x &= 0 && \text{voor } x = 0 \text{ en } x = a, \\ u &= f(x) && \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

De behandeling van dit probleem berust op even spiegelen, d.w.z. op uitbreiding van $f(x)$ volgens (zie fig. 10.3)

$$f(-x) = f(x), \quad f(x+2a) = f(x).$$

De oplossing is

$$(10.5) \quad u(x, t) = \int_0^a f(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{G(x-\xi-2ka, t) + G(x+\xi-2ka, t)\} d\xi$$

of in het speciale geval van de puntbron

$$(10.6) \quad u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{G(x-x_0-2ka, t) + G(x+x_0-2ka, t)\}.$$

De in §5 gevonden oplossing was van de vorm

$$(10.7) \quad u(x, t) = \frac{1}{a} \int_0^a f(\xi) d\xi + \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} \exp - \frac{n^2 \pi^2 t}{a^2} d\xi$$

of voor de puntbron

$$(10.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x_0}{a} \exp - \frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}.$$

Weer zijn de voorstellingen (10.5), (10.6) alleen numeriek bruikbaar voor kleine t en (10.7), (10.8) alleen numeriek bruikbaar voor grote t .

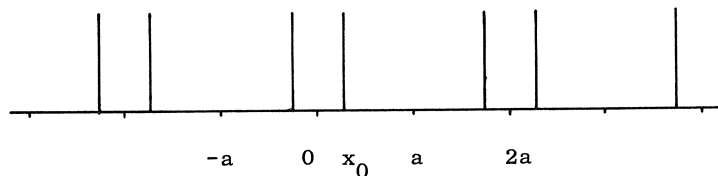


fig. 10.3

Probleem 10.3

$$u = c_1 \quad \text{voor} \quad x = 0,$$

$$u = c_2 \quad \text{voor} \quad x = a,$$

$$u = f(x) \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Dit probleem kan tot dat van 10.1 teruggebracht worden door $u = v + w$ te stellen waarbij v en w beide aan de warmtegeleidingsvergelijking voldoen en waarbij w een eenvoudige oplossing is die aan de gestelde inhomogene randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = a$ voldoet zodat de overeenkomstige randvoorwaarden voor v van homogene aard worden. Het is het eenvoudigste om voor w een oplossing te kiezen die niet van t afhangt, d.w.z. zodat

$$w_{xx} = 0 \quad \text{met} \quad w = c_1 \quad \text{voor} \quad x = 0, \quad w = c_2 \quad \text{voor} \quad x = a.$$

De hulpoplossing is blijkbaar

$$(10.9) \quad w = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a} x.$$

De verdere uitwerking geeft nu geen problemen meer.

Probleem 10.4

$$u_{xx} = u_t \quad \text{voor} \quad -\pi < x < \pi$$

met de randvoorwaarden

$$u = t \quad \text{voor} \quad x = -\pi \quad \text{en} \quad x = \pi$$

en de beginvoorwaarde

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Dit probleem kan door gebruik te maken van het principe van Duhamel teruggebracht worden tot een eenvoudiger probleem. Daartoe is het voldoende de randvoorwaarden bij $x = \pm \pi$ te vervangen door $u = 1$ voor $x = \pm \pi$. Zonder moeite leiden we hiervoor de volgende oplossing af

$$F(x, t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \exp - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t,$$

waarbij a_n uit de beginvoorwaarde volgt volgens

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \, dx = \frac{2(-1)^n}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}.$$

Het principe van Duhamel leidt dan tot

$$u(x, t) = \int_0^t \tau \frac{d}{d\tau} F(x, t-\tau) d\tau = \int_0^t F(x, \tau) d\tau.$$

Uitwerking van de integratie geeft tenslotte

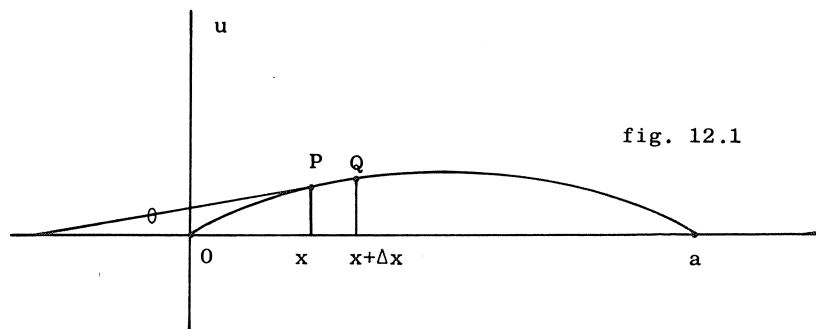
$$\begin{aligned} u(x, t) = & t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \exp - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t \end{aligned}$$

of nog iets beter

$$(10.10) \quad u(x, t) = t - \frac{1}{2}(\pi^2 - x^2) + \frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)^3} \exp - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t.$$

11. De trillende snaar

De beweging van een trillende snaar welke zich in rust uitstrekt over het interval $0 < x < a$ wordt beschreven door de functie $u(x,t)$ in de betekenis van de uitwijking op de plaats x en op het tijdstip t . In het gebruikelijke mathematische model beperken we ons tot kleine vervormingen waarbij zowel u als u_x klein zijn.



In fig. 11.1 beschouwen we het snaarelement PQ tussen x en $x+\Delta x$. Heeft de snaar een vervorming ondergaan dan leveren de aan de uiteinden van dit element werkende krachten een component op welke dit element naar de evenwichtsstand teruggedrijft. Tengevolge van de spanning τ in de snaar werkt op P een kracht $\tau \sin \theta$ loodrecht op de x -as en op Q een overeenkomstige kracht met iets andere θ . De resultante is

$$(\tau \sin \theta)_{x+\Delta x} - (\tau \sin \theta)_x = \tau \cos \theta \frac{d\theta}{dx} dx.$$

Voor kleine vervormingen geldt bij benadering $\theta \approx 0$ en verder

$$\theta \approx \tan \theta = \partial u / \partial x.$$

De op PQ werkende teruggedrijvende kracht is daarmee bij benadering gelijk aan $\tau u_{xx} \Delta x$.

Is ρ de constant veronderstelde dichtheid van de snaar dan is volgens de wet van Newton de op PQ werkende kracht gelijk aan $\rho u_{tt} \Delta x$.

Daarmede wordt de vergelijking van de trillende snaar van de vorm

$$(11.1) \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

waarbij

$$c = \sqrt{\tau/\rho}$$

de dimensie van een snelheid heeft.

Is de snaar bovendien onderworpen aan een op elk element werkende uitwendige kracht $F(x, t)$ dan kan (11.1) nog uitgebreid worden tot

$$(11.2) \quad \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x, t).$$

Bij problemen betreffende een trillende snaar kiezen we vaak ter vereenvoudiging dusdanige eenheden dat bijv. $c = 1$ en $a = \pi$.

De bij (11.1) resp. (11.2) behorende randvoorwaarden zijn natuurlijk $u = 0$ aan de uiteinden.

Voorts moet voor een eenduidig bepaalde beweging als bij elk mechanisch probleem zowel beginpositie als beginsnelheid voorgeschreven zijn.

Aldus kunnen we het volgende mathematische model formuleren

$$(11.3) \quad u_{xx} = u_{tt} - F(x, t) \quad \text{voor} \quad 0 < x < a,$$

$$(11.4) \quad u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a,$$

$$(11.5) \quad \begin{cases} u = f(x), \\ u_t = g(x) \end{cases} \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

We beginnen met een beweging zonder uitwendige kracht. Passen we de in §3 beschreven methode van Bernoulli toe dan zoeken we eerst speciale oplossingen van $u_{xx} = u_{tt}$ waarvoor $u = \phi(x) \psi(t)$. Dit vereist

$$\phi_{xx}/\phi = \psi_{tt}/\psi = \text{constant}.$$

Aangezien voor $\phi(x)$ zeker twee nulpunten, bij $x = 0$ en $x = a$, aanwezig moeten zijn komt slechts een trigonometrische functie in aanmerking hetgeen in het rechterlid een negatieve constante, zeg $-\lambda^2$ impliceert. Als in §3 geldt dus

$$\phi = A \sin \lambda x$$

waarbij

$$\sin \lambda a = 0.$$

Voor de bedoelde constante komen weer de volgende waarden in aanmerking

$$\lambda_n = n\pi/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Voor ψ vinden we eveneens een trigonometrische functie

$$\psi_n = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t.$$

Met toepassing van het superpositiebeginsel kunnen we de verlangde oplossing trachten voor te stellen als

$$(11.6) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t/a + b_n \sin n\pi t/a) \sin n\pi x/a.$$

De laatste stap betreft de aanpassing aan de beginvoorwaarde (11.5) hetgeen leidt tot

$$(11.7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x/a,$$

en

$$(11.8) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi b_n}{a} \sin n\pi x/a.$$

Evenals dit het geval was bij de warmtegeleidingsproblemen moet uiteindelijk een gegeven functie in een Fourier reeks ontwikkeld worden. Zoals bekend volgen a_n en b_n uit de gegeven functies als

$$(11.9) \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sin n\pi\xi/a \, d\xi,$$

en

$$(11.10) \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^a g(\xi) \sin n\pi\xi/a \, d\xi.$$

We hebben nu gezien dat bij een trillende snaar zogenaamde vrije bewegingen mogelijk zijn van de vorm

$$(11.11) \quad u = \sin \frac{n\pi x}{a} \exp \frac{in\pi t}{a},$$

waarbij ter bekorting de complexe schrijfwijze is toegepast. De beweging heet voor $n = 1$ de grondtoon en voor $n > 1$ een boventoon. Acoustisch verhouden de frequenties zich als $1 : 2 : 3 : \dots$ en corresponderen dus resp. met oktaaf, kwint, etc.

We beschouwen vervolgens het probleem van een onder invloed van een uitwendige kracht trillende snaar. We beginnen met een uitwendige kracht van de vorm

$$(11.12) \quad F(x,t) = F(x) \exp i\omega t,$$

waarbij, ook omdat we niet letten op beginvoorwaarden, weer de complexe schrijfwijze is gebruikt.

Het ligt voor de hand een oplossing te poneren van de vorm

$$(11.13) \quad u(x,t) = \phi(x) \exp i\omega t.$$

Substitutie in (11.3) geeft

$$(11.14) \quad \phi_{xx} + \omega^2 \phi = -F(x)$$

met de randvoorwaarden

$$(11.15) \quad \phi = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a.$$

Voor de oplossing van het probleem (11.14) met de randvoorwaarden (11.15) kunnen we de techniek van de variatie van de constanten toepassen door te schrijven

$$\phi(x) = A(x) \sin \omega x + B(x) \sin \omega(a-x)$$

waarbij $A(x)$ en $B(x)$ nader bepaald moeten worden. Op de gebruikelijke wijze leidt dit tot

$$(11.16) \quad \phi(x) = \frac{\sin \omega x \int_x^a \sin \omega(a-\xi) F(\xi) d\xi + \sin \omega(a-x) \int_0^x \sin \omega \xi F(\xi) d\xi}{\omega \sin \omega a}.$$

Het probleem is dus nu opgelost mits echter er geen nulpunt van de noemer is. Is ω zodanig dat $\sin \omega a = 0$, d.w.z. valt ω samen met een eigenfrequentie $n\pi/a$, dan vervalt de oplossing (11.16) zodat de veronderstelling (11.13) onjuist was. Dit is het zgn. resonantiegeval. Is de uitwendige kracht in resonantie met de n^e eigenfrequentie $\omega_n = n\pi/a$ dan kunnen we door limietovergang $\omega \rightarrow \omega_n$ uit (11.13) en (11.16) toch een goede oplossing afleiden en wel op de volgende manier.

Voor $\omega \neq \omega_n$ is met (11.13), waarbij $\phi(x)$ door (11.16) gegeven is, ook

$$\phi(x) \exp i\omega t + C \sin \omega_n x \exp i\omega_n t$$

een oplossing, en wel voor elke keuze van C .

We beschouwen nu de volgende speciale keuze

$$\phi(x) e^{i\omega t} + \omega^{-1} \cotg \omega a \int_0^a \sin \omega \xi F(\xi) d\xi \cdot \sin \omega_n x e^{i\omega_n t}.$$

Voeren we de limietovergang $\omega \rightarrow \omega_n$ uit dan komt er

$$-\omega_n^{-1} \cos \omega_n a \int_0^a \sin \omega_n \xi F(\xi) d\xi \cdot \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{\sin \omega x e^{i\omega t} - \sin \omega_n x e^{i\omega_n t}}{\sin \omega a}$$

hetgeen leidt tot de oplossing

$$(11.17) \quad u(x,t) = -\frac{1}{n\pi} (x \cos \omega_n x + it \sin \omega_n x) e^{i\omega_n t} \int_0^a \sin \omega_n \xi F(\xi) d\xi.$$

Deze oplossing stelt een trilling voor met een in de tijd lineair toe-

nemende amplitude. De trillingen worden tenslotte zo groot dat het lineaire mathematische model waarbij slechts kleine evenwichtsverstoringen toelaatbaar zijn niet langer met de werkelijkheid overeenkomt. In de praktijk kunnen we bijv. bij resonantie het stuktrillen van de snaar verwachten. Uiteraard is bij de laatste twee problemen aanpassing aan beginvoorwaarden achterwege gebleven. Hoe dit geschiedt moge blijken uit de onderstaande voorbeelden.

Probleem 11.1

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} - x \cos \omega t, & 0 < x < \pi, \\ u &= 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi, \\ u &= u_t = 0 & \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

De oplossing van dit probleem berust op de reductie tot een soortgelijk probleem waarbij differentiaalvergelijking en randvoorwaarden homogeen zijn. We stellen daartoe $u = v + w$ waarbij v een of andere oplossing van de gegeven inhomogene differentiaalvergelijking is die aan de gestelde randvoorwaarden voldoet. De beginvoorwaarde is i.h.a. niet vervuld. De tweede term w voldoet nu aan de homogene differentiaalvergelijking en aan de randvoorwaarden. Op de boven beschreven wijze kan w aan de beginvoorwaarde $w = (u - v)_{t=0}$ en $w_t = (u_t - v_t)_{t=0}$ aangepast worden.

Het ligt voor de hand om v van de vorm

$$v = \phi(x) \cos \omega t$$

te kiezen. Voor $\phi(x)$ volgt dan

$$\phi_{xx} + \omega^2 \phi = -x$$

met

$$\phi = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi.$$

We kunnen stellen

$$\phi = -x/\omega^2 + A \sin \omega x + B \cos \omega x$$

waarbij de waarden van A en B uit de randvoorwaarden volgen. Het resultaat is

$$\phi = -\frac{x}{\omega^2} + \frac{\pi \sin \omega x}{\omega^2 \sin \omega \pi}.$$

Voor w geldt het randwaardeprobleem

$$\begin{aligned} w_{xx} &= w_{tt}, & 0 < x < \pi, \\ w &= 0 & \text{voor } x = 0, x = \pi, \\ w &= -\phi(x) & \text{en} \\ w_t &= 0 & \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

Volgens (11.6) is w van de vorm

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \sin nx$$

waarbij volgens (11.9)

$$a_n = \frac{2}{\pi \omega^2 \sin \omega \pi} \int_0^{\pi} (x \sin \omega \pi - \pi \sin \omega x) \sin nx \, dx$$

of na enig rekenen

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{2}{n^2 - \omega^2}.$$

Het totale resultaat is

$$\begin{aligned} (11.18) \quad u(x,t) &= \left(-\frac{x}{\omega^2} + \frac{\pi \sin \omega x}{\omega^2 \sin \omega \pi} \right) \cos \omega t + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2 - \omega^2)} \sin nx \cos nt. \end{aligned}$$

De boven beschreven methode faalt formeel voor $\omega = 1, 2, 3, \dots$ d.w.z. wanneer de frequentie van de uitwendige kracht in resonantie is met een der eigentrillingen.

Wat er aan de hand is voor $\omega = 1$ kan toch uit (11.18) afgeleid worden door een limietovergang $\omega \rightarrow 1$, d.w.z.

$$u(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2 - 1)} \sin nx \cos nt + \lim_{\omega \rightarrow 1} \left\{ \left(-\frac{x}{\omega^2} + \frac{\pi \sin \omega x}{\omega^2 \sin \omega \pi} \right) \cos \omega t - \frac{2 \sin x \cos t}{1 - \omega^2} \right\}.$$

Na enig gereken komt er tenslotte

$$u(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2 - 1)} \sin nx \cos nt + t \sin t \sin x + \left\{ \frac{3}{2} \sin x - x(1 + \cos x) \right\} \cos t.$$

Probleem 11.2

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} - \sin t, & 0 < x < \pi, \\ u &= 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi, \\ u &= u_t = 0 & \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

Dit probleem kan als in het vorige voorbeeld worden opgelost door de term $\sin t$ te vervangen door $\sin \omega t$ en tenslotte de limietovergang $\omega \rightarrow 1$ uit te voeren. Een meer directe methode, maar slechts aanbevelenswaardig als men over enige ervaring beschikt, is eerst naar een oplossing van differentiaalvergelijking en randvoorwaarden te zoeken van de vorm

$$v = C t \cos t \sin x + \sin t \psi(x).$$

Voor $\psi(x)$ resulteert dan

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + \psi &= -1 - 2C \sin x, \\ \psi &= 0 & \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\psi = -1 + \cos x - \frac{2x}{\pi} \cos x$$

met de waarde $C = -2/\pi$.

We stellen dus

$$u = -\frac{2}{\pi} t \cos t \sin x + \left\{ \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cos x - 1 \right\} \sin t + v(x, t).$$

Het randwaardeprobleem voor $v(x, t)$ is tenslotte van eenvoudige aard en levert geen problemen meer.

12. Problemen in vlak en ruimte

Bij de behandeling van randwaardeproblemen over vlakke gebieden komen een aantal begrippen en eigenschappen ter sprake welke we hieronder kort samenvatten.

We beschouwen i.h.a. functies $f(x,y)$ waarbij (x,y) opgevat kan worden als een punt in een Cartesisch assenstelsel. Bij de toepassingen kunnen we ons meestal beperken tot gebieden D in het (x,y) -vlak van ovale vorm waarbij de randkromme bepaald is door een parameter-voorstelling

$$(12.1) \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

waarbij de afgeleiden $x'(s)$ en $y'(s)$ bestaan en continu zijn, eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten.

Verder nemen we aan dat de rand van D door een willekeurige snijlijn in juist twee punten wordt gesneden. Aan deze voorwaarden voldoen bijv. cirkel, ellips, rechthoek, maar geen ringvormige gebieden. Gewoonlijk kunnen de beschouwingen zonder moeite worden uitgebreid tot ingewikkelder gebieden mits deze maar op eenvoudige wijze uit de boven omschreven gebieden samengesteld kunnen worden.

We beschouwen nu i.h.b. een ovaal gebied D met een gladde rand ∂D . Bij dit gebied (zie fig. 12.1) kunnen we een binnengebied en een buitengebied onderscheiden. De randkromme zij door (12.1) gegeven waarbij s de booglengte is. Bij de rand hebben we te maken met de raaklijn, gericht volgens toenemende s , en de normaal welke we naar buiten gericht denken.

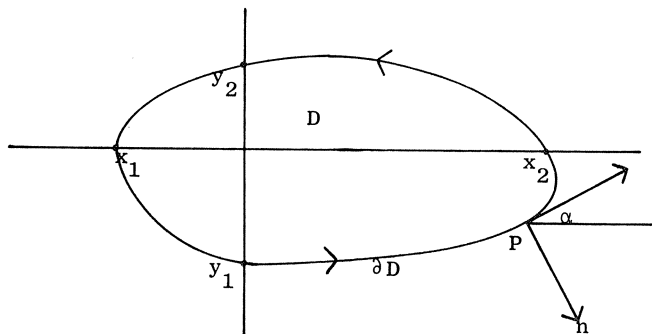


fig. 12.1

Bij functies $f(x,y)$ definiëren we de richtingsafgeleide in de richting α als $D(\alpha)f$ waarbij $D(\alpha)$ de volgende differentiaaloperator is

$$(12.2) \quad D(\alpha) = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}.$$

In een punt P van de randkromme van een gebied kunnen we i.h.b. differentiëren in de richting van de raaklijn en in die van de normaal. In het eerste geval kunnen we spreken van de tangentiële afgeleide. Aangezien voor de raaklijn in P

$$(12.3) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}$$

kan de tangentiële afgeleide geschreven worden als

$$(12.4) \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

hetgeen uiteraard in overeenstemming met de kettingregel is.

In het tweede geval spreken we van de normaalafgeleide waarvoor we schrijven

$$(12.5) \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{dx}{ds}.$$

Stelling van Green

Voor tweemaal continu differentieerbare functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ geldt

$$(12.6) \quad \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iint_D u \Delta v dx dy,$$

$$\text{waarbij } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Bewijs (zie fig. 12.1)

$$\iint_D (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (uv_x) + \frac{\partial}{\partial y} (uv_y) - u \Delta v \right\} dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left\{ (uv_x) \Big|_{x_1(x)}^{x_2(y)} \right\} dy + \int \left\{ (uv_y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right\} dx - \iint_D u \Delta v \, dx dy = \\
&= \int_{\partial D} u \left(v_x \frac{dy}{ds} \right) ds - \int_{\partial D} u \left(v_y \frac{dx}{ds} \right) ds - \iint_D u \Delta v \, dx dy = \\
&= \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \iint_D u \Delta v \, dx dy.
\end{aligned}$$

Uit de stelling van Green kunnen we door specialisatie de volgende veelgebruikte aan Gauss toegeschreven stelling afleiden.

Stelling van Gauss

Voor een tweemaal continu differentieerbare functie $u(x,y)$ geldt

$$(12.7) \quad \iint_D \Delta u \, dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Bewijs

Kies in (12.6) $u = 1$.

Uit (12.6) kunnen nog meer voor de toepassingen nuttige identiteiten worden afgeleid. Aangezien het linkerlid van (12.6) symmetrisch is geldt een overeenkomstige formule waarbij in het rechterlid u en v verwisseld zijn. Door aftrekking resulteert de gelijkheid

$$(12.8) \quad \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx dy = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

welke soms ook als de stelling van Green aangeduid wordt.

Uit (12.6) volgt voorts door v en u gelijk te stellen

$$(12.9) \quad \iint_D u \Delta u \, dx dy = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \iint_D (u_x^2 + u_y^2) \, dx dy.$$

Al deze begrippen en eigenschappen kunnen zonder moeite op de driedimensionale ruimte overgedragen worden. De stelling van Gauss bijv. wordt beschreven door

$$(12.10) \quad \iiint_D \Delta u \, d\tau = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma,$$

waarbij Δ , de operator van Laplace, in drie dimensies gegeven is door

$$(12.11) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

en waarbij $d\tau$ een volumeelement $dx dy dz$ en $d\sigma$ een oppervlakteelement voorstelt.

Soms maken we gebruik van een notatie die onafhankelijk is van het aantal dimensies. De stelling van Gauss wordt dan geschreven als

$$(12.12) \quad \int_D \Delta u \, dP = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, dP.$$

13. Warmtegeleiding in de ruimte

We beschouwen warmtegeleiding in een homogeen verondersteld driedimensionaal medium dat in alle richtingen dezelfde eigenschappen heeft. De warmtetoestand wordt, bij gebruik van Cartesische coördinaten, bepaald door de temperatuur $u(x,y,z,t)$. Temperatuurverschillen geven aanleiding tot een warmtestroom, en wel is de hoeveelheid warmte dq welke in dt seconden door een oppervlakteelement $d\sigma$ stroomt gelijk aan

$$dq = -K \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma dt,$$

waarbij $\partial/\partial n$ differentiatie langs de normaal van het oppervlakteelement aangeeft.

Om tot de driedimensionale warmtevergelijking te komen maken we de warmtebalans op voor een rechthoekig elementair blokje (zie fig. 13.1) dat begrensd wordt door vlakken x en $x+dx$, y en $y+dy$, z en $z+dz$. De netto hoeveelheid die in dt seconden de vlakken bij x en $x+dx$ passeert is

$$\begin{aligned} & K \frac{\partial u(x+dx, y, z, t)}{\partial x} dydzdt - K \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} dydzdt \\ &= K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz dt, \end{aligned}$$

welke warmte dus door het volumeelement opgenomen is en bijdraagt tot de warmtevermeerdering in dt seconden.

De stroom door de overige vlakken levert analoge bijdragen en er resulteert voor de opgenomen warmtehoeveelheid

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt.$$

Anderzijds kunnen we hier als in §2 voor schrijven

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt.$$

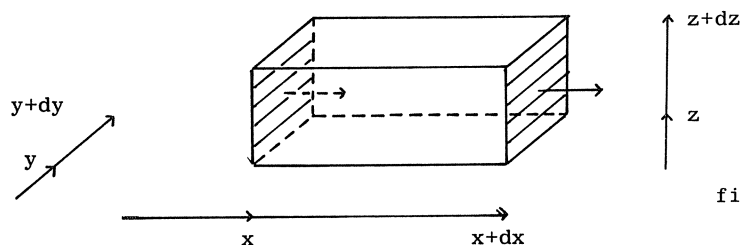


fig. 13.1

Gelijkstelling leidt tot de vergelijking van de warmtegeleiding in drie dimensies

$$(13.1) \quad k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$k = \frac{K}{\rho c}.$$

Als bij de in §2 beschreven eendimensionale warmtegeleiding kunnen we door keuze van eenheden o.a. bereiken dat $k = 1$. Met de notatie van de Laplace operator

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

schrijven we (13.1) dan beknopt als

$$(13.2) \quad \Delta u = u_t.$$

Een warmtegeleidingsprobleem heeft i.h.a. betrekking op een gebied D dat zich al of niet naar het oneindige uitstrekt en dat begrensd wordt door een rand ∂D .

De bij een randwaardeprobleem behorende randvoorwaarden kunnen van de volgende vorm zijn:

a) Voorgeschreven temperatuur aan de rand

$$(13.3) \quad u = u_1(P, t) \quad \text{voor} \quad P \in \partial D.$$

b) Voorgeschreven warmtetransport aan de rand

$$(13.4) \quad K \frac{\partial u}{\partial n} = q_1(P, t) \quad \text{voor} \quad P \in \partial D.$$

c) Randvoorwaarde van Newton

$$(13.5) \quad K \frac{\partial u}{\partial n} = h(u - u_0) \quad \text{voor} \quad P \in \partial D.$$

Om tot een eenduidig bepaalde oplossing van een warmtegeleidingsprobleem te komen moeten voor een zich naar het oneindige uitstrekkend gebied nog zekere voorwaarden in het oneindige toegevoegd worden.

In de regel is het voldoende te eisen dat $u(P, t)$ voor $P \rightarrow \infty$ begrensd blijft.

We laten nu zien hoe in een eenvoudig geval, waarbij D begrensd is, de eenduidigheid inderdaad bewezen kan worden. We kiezen daartoe de eerste randvoorwaarde, die van een voorgeschreven temperatuur.

Uiteraard dient ook de beginsituatie vastgelegd te worden. Het gestelde probleem is nu

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_t, \\ u &= f(P, t) \quad \text{voor} \quad P \in \partial D, \\ u &= \phi(P) \quad \text{voor} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Nemen we aan dat er twee oplossingen u_1 en u_2 van dit probleem zijn dan geldt voor het verschil $u = u_1 - u_2$ een overeenkomstig homogeen probleem

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_t, \\ u &= 0 \quad \text{voor} \quad P \in \partial D, \\ u &= 0 \quad \text{voor} \quad t = 0. \end{aligned}$$

Indien we er in slagen te bewijzen dat dit homogene stelsel slechts de triviale oplossing $u \equiv 0$ toelaat is bewezen dat $u_1 \equiv u_2$ hetgeen eenduidigheid betekent.

Het bewijs van deze bewering loopt a.v.

We beschouwen de integraal

$$I = \frac{1}{2} \int_D u^2 dP.$$

Differentiatie naar de tijd geeft

$$\frac{dI}{dt} = \int_D u u_t dP = \int_D u \Delta u dP.$$

Volgens de stelling van Green (12.9) kunnen we de laatste uitdrukking herleiden tot

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dP - \int_D (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dP = \\ &= - \int_D (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dP \leq 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $I(t)$ een monotoon niet-stijgende functie is. Omdat $I(t) \geq 0$ krachtens definitie en $I(0) = 0$ wegens de beginvoorwaarde resulteert $I(t) \equiv 0$ voor alle t . Dit betekent dan dat $u(P, t) \equiv 0$ voor alle P en t .

We wijzen er even op dat het gegeven bewijs nog een kleine lacune bevat. We hebben namelijk verondersteld dat $I(t)$ voor $t = 0$ continu is, hetgeen niet uit de gegevens volgt. Om dit bezwaar te overvragen moeten we de beginvoorwaarde $u = 0$ voor $t = 0$ nader preciseren als $u \rightarrow 0$ uniform voor $t \rightarrow 0$, of anders uitgedrukt

$$\max_{P \in D} |u(P, t)| \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad t \rightarrow 0.$$

14. Warmtegeleiding in een blok

Bij driedimensionale warmtegeleiding kan het voorkomen dat in bepaalde richtingen geen warmtestroom aanwezig is. Is er bijv. geen warmtetransport in de z-richting dan hangt $u(P,t)$ niet van z af en wordt de vergelijking $\Delta u = u_t$ gereduceerd tot de tweedimensionale vorm

$$(14.1) \quad u_{xx} + u_{yy} = u_t.$$

Is bovendien ook geen warmtestroom in de y-richting aanwezig dan treedt een verdere reductie op tot de in vorige paragrafen beschouwde eendimensionale warmtevergelijking $u_{xx} = u_t$.

De complicaties welke optreden bij de overgang van eendimensionale problemen naar meerdimensionale problemen worden al voldoende geïllustreerd bij de tweedimensionale warmtevergelijking (14.1).

Voorbeeld 14.1

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= u_t & \text{voor } 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u &= 0 & \text{voor } x = 0, x = a, y = 0, y = b, \\ u &= f(x,y) & \text{voor } t = 0. \end{aligned}$$

Als in §3 zoeken we naar speciale oplossingen die niet aan de beginvoorwaarde behoeven te voldoen van het type

$$u = \phi(x) \psi(y) \chi(t).$$

Substitutie geeft

$$\phi_{xx}/\phi + \psi_{yy}/\psi = \chi_t/\chi = \text{constant}.$$

Het ligt voor de hand om alvast te stellen

$$\chi_t + \lambda^2 \chi = 0$$

waarbij λ^2 een nog nader te bepalen niet-negatieve constante is. Analooch stellen we

$$\phi_{xx} + \mu^2 \phi = 0, \quad \psi_{yy} + \nu^2 \psi = 0,$$

waarbij $\mu^2 + \nu^2 = \lambda^2$.

Aanpassing aan de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $y = 0$ geeft al

$$\phi = \sin \mu x, \quad \psi = \sin \nu y.$$

Aanpassing aan de randen $x = a$, $y = b$ geeft als in §3

$$\mu = m\pi/a, \quad \nu = n\pi/b, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

De gezochte speciale oplossingen, bouwstenen voor de lineaire superpositie, zijn

$$u_{m,n} = \sin m\pi x/a \sin n\pi y/b \exp -\lambda_{m,n}^2 t,$$

met

$$\lambda_{m,n}^2 = m^2 \pi^2 / a^2 + n^2 \pi^2 / b^2.$$

Lineaire superpositie leidt tot de algemenere oplossing

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n} a_{m,n} e^{-\lambda_{m,n}^2 t} \sin m\pi x/a \sin n\pi y/b.$$

Het sluitstuk is de aanpassing aan de beginvoorwaarde

$$f(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n} \sin m\pi x/a \sin n\pi y/b.$$

Het probleem is tenslotte gereduceerd tot dat van de ontwikkeling van een gegeven functie in een tweedimensionale Fourier-reeks. Het is nauwelijks nodig hiervoor een aparte theorie te ontwikkelen gezien de evidente analogieën en we volstaan dan ook met de vermelding van de coëfficiëntenformule

$$a_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin m\pi x/a \sin n\pi y/b \, dx dy.$$

Het algemene formalisme ^{*)}, waarbij we ons ter vereenvoudiging tot een begremsd tweedimensionaal gebied beperken, is als volgt.

We beschouwen het probleem

$$(14.2) \quad \begin{cases} \Delta u = u_t & \text{in } D, \\ u = 0 & \text{op } \partial D, \\ u = f & \text{voor } t \rightarrow 0. \end{cases}$$

We zoeken eerst speciale oplossingen van het type

$$u = \phi(x,y) \exp -\lambda^2 t$$

waarbij aan de randvoorwaarde voldaan is.

Substitutie levert voor ϕ een zogenaamd probleem van Sturm-Liouville

$$(14.3) \quad \begin{cases} (\Delta + \lambda^2)\phi = 0 & \text{in } D, \\ \phi = 0 & \text{op } \partial D. \end{cases}$$

Dit probleem is gekarakteriseerd als een (elliptische) pdv met een parameter λ . Bij dit probleem bestaan er i.h.a. slechts voor beperkte waarden van λ , de zogenaamde eigenwaarden, oplossingen. Men kan verwachten dat bij een begremsd gebied de eigenwaarden een aftelbare rij $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ vormen of m.a.w. een discreet spectrum vormen. Bij een onbegremsd gebied vormen de eigenwaarden een continue reeks d.w.z. een continu spectrum. In het hier beschouwde geval kunnen de eigenwaarden en de bijbehorende oplossingen, de eigenfuncties van het Sturm-Liouville probleem, met een rangnummer n aangeduid worden.

De functies welke in D tweemaal continu differentieerbaar zijn en die op ∂D overeenkomstig de gestelde randvoorwaarde verdwijnen verenigen we gewoonlijk tot een (pre-)Hilbert ruimte door het invoeren van een inwendig product volgens

^{*)} Vergelijk de overeenkomstige beschouwingen in §5.

$$(14.4) \quad (\phi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_D \phi \psi \, dP.$$

Zonder moeite kunnen we ons ervan overtuigen dat bij verschillende eigenwaarden behorende eigenfuncties orthogonaal zijn. Immers uit

$$\Delta \phi_m + \lambda_m^2 \phi_m = 0 \text{ en } \Delta \phi_n + \lambda_n^2 \phi_n = 0$$

volgt

$$\begin{aligned} (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)(\phi_m, \phi_n) &= (\phi_m, \Delta \phi_n) - (\Delta \phi_m, \phi_n) = \\ &= \int_{\partial D} \left(\phi_m \frac{\partial \phi_n}{\partial n} - \phi_n \frac{\partial \phi_m}{\partial n} \right) dP = 0, \end{aligned}$$

waarbij een stelling van Green toegepast is.

Er geldt dus

$$(14.5) \quad (\phi_m, \phi_n) = 0.$$

Alle eigenfuncties kunnen nu tot een orthogonaal stelsel verenigd worden dat onder zeer ruime voorwaarden volledig is, d.w.z. dat het mogelijk is een willekeurige functie f uit de genoemde functieklassen te schrijven als

$$(14.6) \quad f = \sum_n a_n \phi_n.$$

De coëfficiënten a_n van deze gegeneraliseerde Fourier reeks zijn gegeven door de coëfficiëntenformule

$$(14.7) \quad a_n = (f, \phi_n) / (\phi_n, \phi_n).$$

De oplossing van het gestelde warmtegeleidingsprobleem kan tenslotte onmiddellijk neergeschreven worden als

$$(14.8) \quad u = \sum_n a_n \phi_n \exp -\lambda_n^2 t.$$

Na deze enigszins schetsmatige behandeling geven we weer een concreet voorbeeld waarbij geïllustreerd wordt welke complicaties

optreden bij een zich naar het oneindige uitstrekkend gebied.

Voorbeeld 14.2

$$u_{xx} + u_{yy} = u_t \quad \text{voor} \quad 0 < x < \pi, y > 0,$$

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \text{ en } x = \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0,$$

$$u = e^{-y} \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

De bouwstenen voor de oplossing zijn blijkbaar

$$\sin mx \cos vy \exp -(m^2 + v^2)t$$

waarbij m een discrete eigenwaarde ($m = 1, 2, \dots$) en v een continue eigenwaarde ($v \geq 0$) is. De samengestelde eigenwaarde $m^2 + v^2$ is natuurlijk continu. We stellen

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sin mx \int_0^{\infty} a_m(v) \cos vy e^{-(m^2+v^2)t} dv.$$

Voor $t = 0$ komt er

$$\exp -y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin mx \int_0^{\infty} a_m(v) \cos vy dv.$$

Wegens

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

geldt dus voor oneven m

$$\int_0^{\infty} a_m(v) \cos vy dv = \frac{4}{m\pi} \exp -y.$$

Hieruit volgt tenslotte

$$a_m(v) = \frac{8}{m\pi} \frac{1}{v^2 + 1} \quad (m \text{ oneven}).$$

15. Het trillende vlies

We beschouwen een vlies dat over een door een randkromme C begrensd gebied D opgespannen is. Door vormverandering ondergaan punten (x,y) van het vlies een (kleine) verplaatsing $u(x,y)$ uit hun evenwichtsstand waarbij het vlies vlak is. In het algemeen hangt de uitwijking ook van de tijd af en schrijven we $u(x,y,t)$ voor de functie van de vormverandering. Deze functie is het vlakke of tweedimensionale analogon van de in §11 beschreven vormverandering van een trillende snaar.

Voor de beschrijving van de beweging van een vlies dat eventueel onderworpen is aan een uitwendige kracht $F(x,y,t)$ kan een p.d.v. afgeleid worden welke als generalisatie van (11.2) de volgende vorm heeft

$$(15.1) \quad \tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x,y,t).$$

We kunnen veronderstellen dat het vlies aan de rand C vastgehecht is. In dat geval dient aan (15.1) de volgende randvoorwaarde toegevoegd te worden

$$(15.2) \quad u = 0 \quad \text{op} \quad C.$$

Het kan voorkomen dat het vlies slechts aan een deel C_1 van C vastgehecht is en aan het complementaire deel C_2 vrij kan bewegen. De randvoorwaarde is nu

$$(15.3) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{op} \quad C_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{op} \quad C_2. \end{cases}$$

Tenslotte moeten voor de volledige bepaling van de beweging als bij de trillende snaar zowel beginpositie als beginsnelheid voorgeschreven worden, d.w.z.

$$(15.4) \quad \begin{cases} u = f(x,y), \\ u_t = g(x,y) \quad \text{voor} \quad t = 0. \end{cases}$$

In deze paragraaf beschouwen we alleen het geval van een rechthoekig vlies waarbij de rechthoekige rand gegeven is door

$$(15.5) \quad \begin{cases} x = 0, & x = a & u = 0, \\ y = 0, & y = b & u = 0. \end{cases}$$

De vrije bewegingen van een dergelijk vlies zijn bepaald door (15.1) met $F \equiv 0$ en de randvoorwaarde. Kiezen we de eenheden zodanig dat $\tau = \rho$ dan reduceert de pdv zich tot

$$(15.6) \quad u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}.$$

Passen we de methode van voorbeeld 14.1 toe dan vinden we de speciale oplossingen

$$\sin \mu x \sin \nu y \chi(t),$$

waarbij

$$\chi_{tt} + (\mu^2 + \nu^2)\chi = 0,$$

zodat

$$\chi = A \sin t \sqrt{\mu^2 + \nu^2} + B \cos t \sqrt{\mu^2 + \nu^2},$$

of in complexe notatie

$$\chi = \exp it \sqrt{\mu^2 + \nu^2}.$$

Aan de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $y = 0$ is door de keuze van een sinus reeds voldaan. De randvoorwaarden bij $x = a$ en $y = b$ vereisen als in voorbeeld 14.1

$$\mu = m\pi/a, \quad \nu = n\pi/b; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

De vrije trillingen zijn daarmee van de vorm

$$(15.7) \quad u = \sin m\pi x/a \sin n\pi y/b \exp it \sqrt{m^2 \pi^2/a^2 + n^2 \pi^2/b^2}.$$

De frequenties

$$\omega = \sqrt{m^2 \pi^2 / a^2 + n^2 \pi^2 / b^2}$$

vormen een discreet spectrum.

In het speciale geval van een vierkant, waarbij we ter vereenvoudiging $a = b = \pi$ kiezen, bevat het spectrum vele meervoudige eigenwaarden. We bedoelen daarmee dat dezelfde frequentie wordt verkregen bij meer combinaties (m,n) . Rangschikking van de vrije trillingen naar opklimmende frequenties geeft

$\sin x \sin y$	$\omega^2 = 2,$
$\sin 2x \sin y, \sin x \sin 2y$	$\omega^2 = 5,$
$\sin 2x \sin 2y$	$\omega^2 = 8,$
$\sin 3x \sin y, \sin x \sin 3y$	$\omega^2 = 10,$
.....	
$\sin 8x \sin y, \sin 7x \sin 4y, \sin 4x \sin 7y, \sin x \sin 8y$	$\omega^2 = 65.$

Een willekeurige vrije beweging van een trillend vlies kan als een lineaire combinatie opgebouwd worden uit de zuiver harmonische vrije bewegingen (15.7). Met behulp hiervan kan de oplossing van een beginwaardeprobleem gevonden worden.

Voorbeeld 15.1

$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}$	voor	$0 < x < \pi, 0 < y < \pi/\theta,$
$u = 0$	voor	$x = 0, x = \pi, y = 0,$
$u_y = 0$	voor	$y = \pi/\theta,$
$u = f(x,y)$	voor	$t = 0,$
$u_t = 0$	voor	$t = 0.$

De oplossing kan worden opgebouwd uit de vrije trillingen

$$\sin mx \sin ny \cos \omega t$$

waarbij

$$v = (n - \frac{1}{2})\theta, \quad \omega^2 = m^2 + v^2, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Hierbij is dus reeds voldaan aan de randvoorwaarden en door de keuze van $\cos \omega t$ aan de beginvoorwaarde $u_t = 0$ voor $t = 0$.

De algemene oplossing kan voorgesteld worden als

$$u = \sum_{m,n} a_{m,n} \sin mx \sin(n - \frac{1}{2})\theta y \cos t \sqrt{m^2 + (n - \frac{1}{2})^2 \theta^2}.$$

Aanpassing aan de beginvoorwaarde $u = f(x, y)$ voor $t = 0$ geeft

$$f(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n} \sin mx \sin(n - \frac{1}{2})\theta y.$$

De coëfficiënten worden gegeven door

$$a_{m,n} = \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{\pi/\theta} f(x, y) \sin mx \sin(n - \frac{1}{2})\theta y \, dx dy.$$

16. Bessel functies

Bij de behandeling van randwaardeproblemen welke betrekking hebben op cirkelvormige of cilindrische gebieden is het beter gebruik te maken van pool- of cylindercoördinaten volgens

$$(16.1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Beschouwen we bijvoorbeeld warmtegeleiding in een cirkelvormige plaat welke beheerst wordt door de pdv

$$(16.2) \quad u_{xx} + u_{yy} = u_t, \quad x^2 + y^2 < a^2,$$

dan moet de Laplace operator Δ in poolcoördinaten (r, θ) omgeschreven worden.

Rechtstreekse transformatie volgens

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

enz.

levert na enig gereken

$$(16.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

De warmtegeleidingsvergelijking (16.3) kan eenvoudiger nog rechtstreeks afgeleid worden. We beschouwen iets algemener cylindercoördinaten (r, θ, z) en maken als in §13 de warmtebalans op voor een elementair blokje dat begrensd wordt door vlakken $z, z+dz$, door cylindervlakken $r, r+dr$ en weer vlakken $\theta, \theta+d\theta$. We vinden

$$\begin{aligned} K \frac{\partial u}{\partial r} r d\theta dz \Big|_r^{r+dr} + K \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} dr dz \Big|_\theta^{\theta+d\theta} + K \frac{\partial u}{\partial z} r d\theta dr \Big|_z^{z+dz} = \\ = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + r d\theta dr dz. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus, iets algemener dan (16.3)



$$(16.4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t},$$

waarbij weer $k = \frac{K}{\rho c}.$

We beschouwen nu verder alleen de pdv (16.3). Als in §14 zoeken we eerst naar speciale oplossingen van het type

$$(16.5) \quad u = \phi(r) \psi(\theta) \chi(t).$$

Op grond van de ervaringen o.a. opgedaan in §14 ligt het voor de hand om te stellen

$$(16.6) \quad \psi(\theta) = e^{i\mu\theta}, \quad \chi(t) = e^{-\lambda^2 t},$$

waarbij λ en μ willekeurige parameters zijn. Hierbij is gemakshalve complexe notatie toegepast. In de reële schrijfwijze moeten we

$$\psi(\theta) = a \sin \mu\theta + b \cos \mu\theta \text{ of } \psi(\theta) = \sin \mu(\theta - \theta_0)$$

stellen.

Substitutie van (16.5) met (16.6) leidt tot de volgende gewone dv voor $\phi(r)$

$$(16.7) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) \phi = 0.$$

Deze vergelijking welke twee parameters bevat kan door λr als nieuwe onafhankelijke variabele te kiezen gereduceerd worden tot de volgende dv welke bekend staat als de vergelijking van Bessel

$$(16.8) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(1 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \mu \geq 0.$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn lineaire combinaties van Bessel functies $J_\mu(r)$ en $J_{-\mu}(r)$, d.w.z.

$$(16.9) \quad f(r) = A J_\mu(r) + B J_{-\mu}(r).$$

De preciese definitie van $J_\mu(r)$ stellen we even uit, maar we merken op dat slechts voor $\mu \neq 0, 1, 2, \dots$ de genoemde twee Bessel functies lineair onafhankelijk zijn. Voor $\mu = 0, 1, 2, \dots$ neemt men naast $J_\mu(r)$ de hiervan onafhankelijke functie $Y_\mu(r)$, de functie van Neumann. De index μ heet de orde van de functie van Bessel, resp. Neumann. De Bessel functie $J_\mu(r)$ is gedefiniëerd door de voor alle waarden van r convergente reeksontwikkeling

$$(16.10) \quad J_\mu(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\mu + n + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{\mu+2n}.$$

Hierbij kan μ ook negatieve waarden aannemen. Evenwel geldt voor gehele orde

$$(16.11) \quad J_{-\mu}(r) = (-1)^\mu J_\mu(r).$$

De Bessel functie $J_\mu(r)$ is gekarakteriseerd door het gedrag bij $r = 0$ dat, afgezien van een factor, gelijk is aan dat van r^μ .

De Neumann functie $Y_\mu(r)$ is gedefiniëerd als

$$(16.12) \quad Y_\mu(r) = \frac{\cos \mu\pi J_\mu(r) - J_{-\mu}(r)}{\sin \mu\pi}$$

en voor $\mu = 0, 1, 2, \dots$ als de limiet van het rechterlid.

In het bijzonder is

$$(16.13) \quad J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}$$

en

$$(16.14) \quad Y_0(r) = \frac{2}{\pi} \left(\ln\left(\frac{r}{2}\right) + \gamma \right) J_0(r) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n! n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n},$$

waarbij $\gamma = 0.5772\dots$ (constante van Euler).

Voor kleine waarden van r heeft men genoeg aan de eerste paar termen van de reeksontwikkeling. Uitgeschreven

$$(16.15) \quad J_0(r) = 1 - \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{64} r^4 - \dots,$$

$$(16.16) \quad J_1(r) = \frac{1}{2} r - \frac{1}{16} r^3 + \frac{1}{384} r^5 - \dots,$$

$$(16.17) \quad Y_0(r) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{r}{2} + \frac{2\gamma}{\pi} - \frac{r^2}{2\pi} \ln \frac{r}{2} + \dots,$$

$$(16.18) \quad Y_1(r) = -\frac{2}{\pi r} + \frac{r}{\pi} \ln \frac{r}{2} + \dots$$

De Bessel functies $J_\mu(r)$ en $Y_\mu(r)$ zijn oscillerende functies die voor grote waarden van r ongeveer overeenstemmen met harmonische functies waarbij de amplitude als $r^{-1/2}$ langzaam tot nul convergeert.

Zonder bewijs zij vermeld dat

$$(16.19) \quad J_\mu(r) = \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \cos\left(r - \frac{1}{2} \mu \pi - \frac{1}{4} \pi\right) + O(r^{-3/2}),$$

$$(16.20) \quad Y_\mu(r) = \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \sin\left(r - \frac{1}{2} \mu \pi - \frac{1}{4} \pi\right) + O(r^{-3/2}).$$

De nulpunten van de meest voorkomende Bessel functie $J_0(r)$ worden gewoonlijk aangegeven met β_n $n = 1, 2, 3, \dots$. Numeriek

$$\beta_1 = 2.405, \beta_2 = 5.520, \beta_3 = 8.654.$$

Tenslotte vermelden we nog een aantal voor toepassingen nuttige formules.

$$(16.21) \quad J_{\mu-1}(r) + J_{\mu+1}(r) = \frac{2\mu}{r} J_\mu(r),$$

$$(16.22) \quad J_{\mu-1}(r) - J_{\mu+1}(r) = 2 J'_\mu(r),$$

$$(16.23) \quad J'_0(r) = -J_1(r),$$

$$(16.24) \quad Y'_0(r) = -Y_1(r).$$

In sommige toepassingen komt men de vergelijking van Bessel tegen in de volgende gewijzigde vorm

$$(16.25) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) - \left(1 + \frac{\mu^2}{r^2} \right) f = 0.$$

Een oplossing wordt gegeven door $J_\mu(ir)$. In plaats hiervan gebruikt men gewoonlijk de reële variant $I_\mu(r)$, een zgn. gemodificeerde Bessel functie. De definitie is

$$(16.26) \quad I_\mu(r) = i^{-\mu} J_\mu(ir).$$

Uit (16.10) volgt de reeksvoorstelling

$$(16.27) \quad I_\mu(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + \mu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{\mu+2n}.$$

In het bijzonder is

$$(16.28) \quad I_0(r) = 1 + \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{64} r^4 + \dots$$

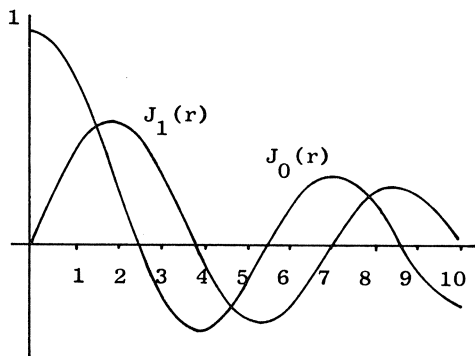


fig. 16.1

(zie Bowman p. 2)

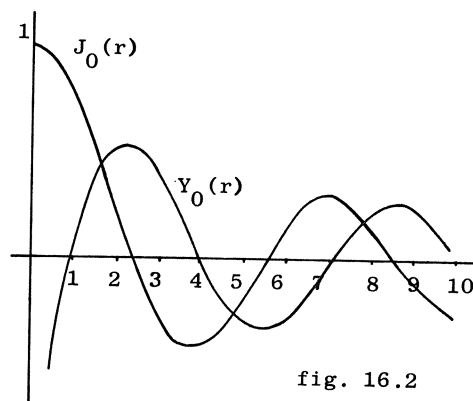


fig. 16.2

(ib. p.6)

17. Problemen in cylindercoördinaten

Het gebruik van de in de vorige paragraaf besproken Bessel functies lichten we hier toe aan de hand van enkele voorbeelden.

Probleem 17.1

De temperatuur u in een oneindig lange cilindrische staaf $r < a$, $-\infty < z < \infty$ is bepaald door de randvoorwaarde $u = u_0$ voor $r = a$ en de beginvoorwaarde $u = f(r)$ voor $t = 0$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we $k = 1$ en $u_0 = 0$ nemen. Door deze keuze van u_0 wordt de randvoorwaarde homogeen hetgeen de toepassing van het superpositiebeginsel vergemakkelijkt. Aangezien u kennelijk niet van θ en z afhangt wordt de warmtevergelijking (16.4) gereduceerd tot

$$(17.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Door separatie verkrijgen we volgens (16.5), (16.6) en (16.7) de speciale oplossingen $J_0(\lambda r) \exp -\lambda^2 t$ en $Y_0(\lambda r) \exp -\lambda^2 t$. Aangezien $u(r, t)$ voor $r = 0$ zeker begrensd moet zijn vervalt de tweede combinatie, die de Neumann functie bevat. We leggen nu aan de overblijvende combinatie de randvoorwaarde bij $r = a$ op. Hieruit volgt

$$(17.2) \quad J_0(\lambda a) = 0,$$

zodat de mogelijke λ -waarden gegeven zijn door

$$(17.3) \quad \lambda_n = \beta_n / a, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

waarbij β_n het n -de nulpunt van de Bessel functie $J_0(r)$ is. De speciale oplossingen $J_0(\lambda r) \exp -\lambda^2 t$ leiden door lineaire superpositie tot de algemene oplossing

$$(17.4) \quad u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \exp -\lambda_n^2 t.$$

De beschreven methode is in feite dezelfde als die in voorbeeld 5.1. Evenals daar is het sluitstuk de aanpassing aan de beginwaarde. Voor $t \rightarrow 0$ moet dus voldaan zijn aan

$$(17.5) \quad f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r).$$

De reeks in het rechterlid heeft sterke verwantschap met een Fourier reeks zoals (5.1) en heet dan ook Fourier-Bessel reeks. Aan de diepere theorie van dit type reeks gaan we stilzwijgend voorbij. Formeel berust de bepaling van de ontwikkelingscoëfficiënten a_n op de orthogonaliteitsrelaties

$$(17.6) \quad \int_0^a J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) r \, dr = 0 \quad \text{voor} \quad m \neq n,$$

en

$$(17.7) \quad \int_0^a J_0^2(\lambda_n r) r \, dr = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(\lambda_n a).$$

Hieruit volgt derhalve

$$(17.8) \quad a_n = \frac{2 \int_0^a f(r) J_0(\lambda_n r) r \, dr}{a^2 J_1^2(\lambda_n a)}.$$

Het bewijs van (17.6) is a.v.

Aangezien $\phi_n(r) = J_0(\lambda_n r)$ voldoet aan

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_n}{dr} \right) = -\lambda_n^2 r \phi_n,$$

en analoog ϕ_m , geldt

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) r \phi_m \phi_n = \phi_m \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_n}{dr} \right) - \phi_n \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_m}{dr} \right).$$

Integratie tussen 0 en a levert na partiële integratie van het rechterlid

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^a r \phi_m \phi_n \, dr = r \left(\phi_m \frac{d\phi_n}{dr} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dr} \right) \Big|_0^a = 0.$$

Het bewijs van (17.7) is a.v.

$$\begin{aligned} \int_0^a r \phi_n^2 dr &= -\frac{1}{2} \int_0^a r^2 \frac{d\phi_n^2}{dr} dr = - \int_0^a r^2 \phi_n \frac{d\phi_n}{dr} dr = \\ &= \lambda_n^{-2} \int_0^a r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_n}{dr} \right) \frac{d\phi_n}{dr} dr = \frac{1}{2} \lambda_n^{-2} \left(r \frac{d\phi_n}{dr} \right)^2 \Big|_0^a = \\ &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \{J_0'(\lambda_n a)\}^2 = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(\lambda_n a). \end{aligned}$$

Probleem 17.2

We beschouwen de trillingsvormen van een trillend cirkelvormig vlies $r < a$. Het probleem is bepaald door

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad r < a,$$

met de randvoorwaarde

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad r = a.$$

We zoeken hierbij naar speciale oplossingen van het, complex geschreven, type

$$u = \phi(r) \exp i(\mu\theta + \omega t).$$

Als bij (16.7) voldoet $\phi(r)$ aan

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \left(\omega^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) \phi = 0.$$

Aangezien $u(r, \theta, t)$ een eenwaardige periodieke functie in θ is komen voor μ slechts geheeltallige waarden $\mu = m = 1, 2, 3, \dots$ in aanmerking. De functie ϕ is derhalve een Bessel functie van de orde m . De fysische betekenis van de oplossing levert de eis dat u begrensd bij $r = 0$ is en sluit de Neumann functie dus uit. Aldus is

$$\phi(r) = J_m(\omega r).$$

Oplegging van de randvoorwaarde leidt tot

$$J_m(\omega a) = 0,$$

waaruit een reeks ω -waarden, de frequenties van de vrije trillingen, volgt. Voor elke m doorloopt ωa de nulpunten van de Bessel functie $J_m(r)$. De laagste trillingsvorm is die met $m = 0$. Daarbij zijn de vrije trillingen van het type

$$J_0(\beta r/a) \exp i\beta t/a,$$

waarbij β een nulpunt van $J_0(r)$ is. Deze trillingen hangen niet van θ af en zijn dus circulair symmetrisch. Het aantal knopen en buiken, bijv. het aantal cirkels waarop $u = 0$ voor $r < a$, neemt toe met het rangnummer van β . Voor $\beta = \beta_1$ is $u = 0$ alleen op de rand, voor $\beta = \beta_2$ is ook $u = 0$ voor $r = \beta_1 a / \beta_2$ enz.

De trillingsvorm met $m = 1$ kent ook rondlopende golfvormen als

$$J_1(\beta r/a) \sin(\theta - \beta t/a).$$

Probleem 17.3

We beschouwen de stationnaire temperatuurverdeling in de eindige cylinder, $r < a$, $0 < z < b$ met de randvoorwaarden

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad z = 0 \quad \text{en} \quad z = b,$$

$$u = f(z) \quad \text{voor} \quad r = a.$$

Uit (16.4) volgt door weglating van de termen met θ en t de vergelijking

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

We zoeken naar speciale oplossingen van het type $\phi(r) \psi(z)$ waarbij $\psi(0) = \psi(b) = 0$. Het blijkt gemakkelijk dat ψ van de vorm

$$\psi(z) = \sin n\pi z/b$$

is. Terwille van de eenvoud nemen we $b = \pi$.

Voor $\phi(r)$ resulteert dan

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) - n^2 \phi = 0,$$

zodat

$$\phi(r) = I_0(nr).$$

Superpositie levert de algemene oplossing

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(nr) \sin nz.$$

Het sluitstuk, aanpassing aan de resterende, inhomogene, randvoorwaarde is in dit geval een Fourier ontwikkeling van het normale trigonometrische type

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(na) \sin nz.$$

18. Het probleem van Stefan

Van bijzonder belang voor de praktijk zijn warmtegeleidingsproblemen waarbij een overgang van een vloeibare naar een vastefase plaats vindt. Dergelijke problemen zijn het eerst systematisch door Stefan (1891) bestudeerd en worden gewoonlijk naar hem genoemd. Slechts in enkele eenvoudige gevallen is het mogelijk een expliciete analytische oplossing af te leiden.

We beschouwen hier het geval van een eendimensionaal medium $0 < x < \infty$ waarbij het deel $0 < x < X$ vast en het deel $x > X$ vloeibaar is.

Door warmtegeleiding zal de grens tussen beide fasen i.h.a. verschuiven en daarmee een functie $X(t)$ van de tijd zijn.

We nemen aan dat op het begintijdstip $t = 0$ alles vloeistof is met de temperatuur V en dat vanuit $x = 0$ afkoeling plaats vindt waardoor stolling optreedt. De temperatuur en de warmteconstanten in het stollingsgebied duiden we aan met de index 1, die in het vloeistofgebied met de index 2. Verder nemen we ter vereenvoudiging aan dat door de stolling geen volumeverandering optreedt zodat $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Indien de smelttemperatuur met S en de stollingswarmte met L wordt aangeduid kunnen we bijv. het volgende probleem formuleren

$$(18.1) \quad k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{voor} \quad 0 < x < X(t),$$

$$(18.2) \quad k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad \text{voor} \quad X(t) < x < \infty,$$

$$(18.3) \quad u_1 = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0,$$

$$(18.4) \quad u_1 = u_2 = S \quad \text{en}$$

$$(18.5) \quad K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - K_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = L\rho \frac{dX}{dt} \quad \text{voor} \quad x = X(t),$$

$$(18.6) \quad X(t) = 0 \quad \text{en} \quad u_2 = V \quad \text{voor} \quad t = 0.$$

Gesteund door de kennis opgedaan bij de problemen bij een half-oneindige staaf (verg. 7.7) kunnen we de oplossing proberen te vinden in de vorm

$$(18.7) \quad u_1 = A \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{k_1 t}},$$

$$(18.8) \quad u_2 = V - B \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}.$$

Voldaan moet nu nog worden aan de voorwaarden bij $x = X(t)$ welke functie zelf nog onbekend is. Dit betekent o.a. dat moet gelden

$$A \operatorname{erf} \frac{X}{2\sqrt{k_1 t}} = V - B \operatorname{erfc} \frac{X}{2\sqrt{k_2 t}} = S,$$

en wel voor alle waarden van t . We moeten dus stellen

$$(18.9) \quad X(t) = 2\lambda\sqrt{k_1 t}$$

met een nog onbekende factor λ .

De voorwaarden (18.4) en (18.5) worden hiermede

$$(18.10) \quad A \operatorname{erf} \lambda = V - B \operatorname{erfc} \lambda \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = S,$$

$$(18.11) \quad K_1 A \exp(-\lambda^2) - K_2 B (\sqrt{k_1/k_2}) \exp(-\lambda^2 k_1/k_2) = \lambda L k_1 \rho \sqrt{\pi}.$$

Eliminatie van A en B leidt tot een transcendente vergelijking waaruit de onbekende λ opgelost kan worden.

We beschouwen als voorbeeld de situatie bij ijs en water waarbij

$$K_1 = 0.0053, \quad k_1 = 0.0115, \quad L\rho = 73.6,$$

$$K_2 = k_2 = 0.00144.$$

De bedoelde transcendente vergelijking is

$$S e^{-\lambda^2} / \operatorname{erf} \lambda - 0.77(V - S) e^{-8\lambda^2} / \operatorname{erfc} 2\lambda \sqrt{2} = 283 \lambda.$$

Voor enkele waarden van S en V waarbij de buitentemperatuur $u_1(0, t)$ als nultemperatuur gekozen is wordt in onderstaande tabel de oplossing gegeven

	S	V	λ
5° C vorst	5	9	0.117
4° C vorst	4	8	0.104
3° C vorst	3	7	0.090
2° C vorst	2	6	0.073
1° C vorst	1	5	0.050

Hieruit volgt bijv. dat bij vorst van 5° C een ijskorst gevormd wordt waarvan de dikte toeneemt als $X(t) = 1.5\sqrt{t}$ cm met t gemeten in uren

Index

begrensde variatie, functie van	11	Jordan, stelling van	13
Bessel functie	77	Kronecker symbool	12
, gemodificeerde	80	kwadraatlengte	26
, nulpunten van	79	Laplace operator	62
, orde van	78	in poolcoör-	
, orthogonaliteits		dinaten	76
relaties van	82	middelwaardestelling, tweede	14
, vergelijking van	77	Neumann functie	78
Bernoulli, methode van	8	, orde van	78
Bonnet, stelling van	14	Newton, randvoorwaarde van	7,65
coëfficiëntenformule	12,27,68,70	, wet van	50
cosinus-getransformeerde	31	norm van een vector	26
diffusievergelijking	3	normaalafgeleide	60
Dirac, (δ -)functie van	35	omkeerformule	10,39
Dirichlet, lemma van	17	orde symbool	16
Duhamel, principe van	43,45	orthogonaliteitsrelatie	12,19,23,
eenheidssprongfunctie	42		25,26,70
eigenfrequentie	54	Parseval, stelling van	27
eigenfunctie	26,28,29	potentiaalvergelijking	3
eigentrilling	56	Pythagoras, stelling van	27
eigenwaarde	26,69	resonantie	54
Euler, constante van	78	richtingsafgeleide	60
errorfunctie	36	separatiemethode	33
, complementaire	36	signumfunctie	36
Fourier-Bessel reeks	82	sinus-getransformeerde	32
Fourier coëfficiënten	13	spiegelingsprincipe	37,45
getransformeerde	30	Stefan, probleem van	86
integraal	10,29	Sturm-Liouville, probleem van	69
reeks	9,29	superpositiebeginsel	5
, gegeneraliseerde	70	tangentiële afgeleide	60
, twee dimensio-		trigonometrische reeks	11
nale	68	vrije beweging	53,74
Gauss, stelling van	61,62	vrije trilling	73
golfvergelijking	4	warmtebalans	6,63
Green, stelling van	60,61	warmte(geleidings)vergelijking	3

